KEY

TO

EXERCISES IN NEW GEOMETRY

FOR GUJARATI SCHOOLS

PART I

BY

GULABBHAI RAGHUNATHJI NAIK, B. A., S. T. C. D.

(BOMBAY EDUCATIONAL DEPARTMENT)

Author of "Geometry for Guj. Schools, Part I. Book I," "New Geometry, Part I," and joint author of "Junior Arithmetic," "Primary Arithmetic." etc.

FIRST EDITION, 1915

Price One rupee and Four annas.

Published by the Author
Gulabbhai Raghunathji Naik, B. A.,
at Desai Pole, Surat.

Printed by
Thakordas Mansing at the Jain Vijaya Printing Press,
Chauta Bridge, Surat.

ગુજરાતી નિશાળો માટે

નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧ લો.

તેમાંના પ્રશ્નો નો

ખુલાસો.

કર્તા

ગુલાબભાઇ રઘુનાથજી નાયક બી. એ, એસ. ટી. સી. ડી.
(ઓનર્સ)

" ભૂમિતિ ભાગ ૧લો, પુસ્તક ૧ લું " " નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧ લા " ના
કર્તા તથા " જ્યુનીઅર અંકગણિત ", " પ્રાથમિક અંકગણિત "
વીગેરેના સંયુક્ત કર્તા.

પહેલી આવૃતિ ૧૯૧૫

કીંમત સવા રૂપીઓ.

પ્રસ્તાવના.

નામદાર મુંબાઇ સરકારના તા. ૨૩ મી ડીસેમ્બર ૧૯૧૪ના નંબર ૪૧૨૯ થી મારી "ગુજરાતી નિશાળો માટેની નવી ભૂમિતિ, ભાગ ૧ લો" તમામ ગુજરાતી શાળાઓના છઠ્ઠા તથા સાતમા ધોરણોમાં તથા વર્નાક્યૂલર ફાઇનલ માટે તથા ટ્રેનિંગ કોલેજોમાં ટેક્ષ્ટ બુક તરીકે ચલાવવાને મંજુર કરવામાં આવ્યો છે. એ પુસ્તકની બીજી આવૃતિમાં આપેલા પ્રશ્નો પ્રમાણે આ ખુલાસો બહાર પાડયો છે. મારી (જુની) ભૂમિતિ ભાગ ૧ લો નામદાર સરકાર તરફથી જ્યારે ટેક્ષ્ટ તરીકે ચલાવવા મંજુર થયો ત્યારે તેના ખુલાસા માટે શિક્ષકો તથા વિદ્યાર્થીઓ તરફથી જે મોટી માગણી થઇ છે તે ઉપરથી આ ખુલાસો બહાર પાડવાને મેં વ્યાજબી ધાર્યું છે.

આ પુસ્તક બહાર પાડવાનો મુખ્ય ઉદ્દેશ એ છે કે એની મદદથી ઘણાએક શિક્ષકોનો વખત બચવા ઉપરાંત તેઓને ઘણાં-એક સ્થળે ઉપયોગી સૂચનાઓ મળે; તથા ખાનગી રીતે ભણતા વિદ્યાર્થીઓ શિક્ષકની મદદ વિના પોતાના ભૂમિતિના અભ્યાસમાં થોડી થોડી મદદ મેળવી શકે.

ભૂમિતિના પ્રશ્નોના ઉત્તર પરીક્ષામાં કેવી રીતે લખવા તેને માટે પુસ્તકમાં પાનાં ૧૧૭–૧૧૮ ઉપરના પ્રશ્નોમાં જેટલાં પદો લખવાં જોઇએ તેટલાં બધાં બતાવ્યાં છે; શરૂઆતમાં પ્રશ્નોના ઉત્તર સવિસ્તર આપ્યા છે; પરંતુ તે પછીના ભાગમાં ઘણુંખરૂં પ્રશ્નોના ઉત્તરોના મુખ્ય મુખ્ય પદો આપ્યાં છે; અને તે ઉપ-રથી વિદ્યાર્થી ઘણી સહેલાઇથી ઘટતાં પદો ઉમેરી શકશે.

આ ખુલાસાથી વિદ્યાર્થી જોઇએ તેટલીજ મદદ મળે અને તે પોતાની વિચારશક્તિ પણ યોગ્ય પ્રમાણમાં વાપરી શકે એવા હેતુથી પુસ્તકમાં આકૃતિઓ આપવામાં આવી નથી; કારણ કે પ્રશ્નોના ઉત્તરો જો તે બરાબર સમજીને વાંચે તો તેને આકૃતિ

ઢોરી લેતાં પણ આવડશે. જે પ્રશ્નોમાં એક કરતાં વધારે ઉત્તરો આવે છે તેમાં સામાન્ય રીતે મુખ્ય ઉત્તર આપ્યો છે; અને તેમાં આપેલી રીતે વિદ્યાર્થી બીજો ઉત્તર કાઢી શકશે.

ગણુત્રીના પ્રશ્નોમાં જેમ બને તેમ ચોક્કશ આકૃતિઓ ચાર પાંચ જુદી જુદી રીતે કાઢી ઉત્તરો આપ્યા છે. અને ઘણી જગ્યાએ અન્ય રીતે તેના તાળા પણ મેળવ્યા છે. માપના પ્રશ્નોના ઉત્તરોમાં વધારેમાં વધારે એક ટકા જેટલીજ ભૂલ ચલાવી લેવાય છે. જેમકે ૧૦૦°ના ખરા ખુણાનું માપ જો ૧૦૧° કે ૯૯° આવે તો તે ઉત્તર ખરા તરીકે લેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પણ તે ઉપરથી એમ ન સમજવું કે જેમ બને તેમ ખરા ઉત્તર લાવવાને પ્રયત્ન ન કરવો.

આ ખુલાસો બહાર પાડવામાં જોઇએ તેવી કાળજી રાખી છે. પરંતુ કોઇ જગ્યાએ ભૂલ રહી ગઇ હોય તો સુજ્ઞ વાંચનાર માફ કરશે; અને તેવી ભૂલ તે મને લખી મોકલવાની મેહરબાની કરશે. મારાં બીજાં પુસ્તકોને જેવું ઉત્તેજન શિક્ષક તથા વિદ્યાર્થી મંડળ તરફથી મળતું આવ્યું છે તેવુંજ ઉત્તેજન આ પુસ્તકને પણ તેઓ તરફથી મળશે એવી આશા છે.

એપ્રીલ ૧૯૧૫
ગવર્નમેન્ટ હાઈસ્કૂલ, સુરત.

ગુલાબભાઈ રઘુનાથજી નાયક.

અનુક્રમણિકા.

વિષય.	પાનાં.

નવી ભૂમિતિ, ભાગ ૧ લો.
તેમાંના પ્રશ્નોનો ખુલાસો.

ખંડ ૧ લો. કર્તવ્ય ભાગ.

§ ૧. સીધી લીટીની લંબાઇઓ.

(૧). આખા વર્ગ પાસે એકી વખતે એકજ જાતની ચોપડીની લંબાઇ, પહોળાઈ અને જાડાઇ મપાવવી.

(૨). આખા વર્ગ પાસે એકજ જાતના કાટખૂણાઓ મપાવવા.

(૪). ૧ ઈંચ = ૨૫·૪ મીલીમીટર.

(૬). अब + बक = अक થવી જોઇએ.

(૭). अब + बक + कड + डइ = अइ થવી જોઇએ.

(૮). अब – कड = अक + डब થવી જોઇએ.

(૧૧). ૧ + ૬ = ૭. ∴ ૭·૭″ ÷ ૭ = ૧·૧″. માટે એક ભાગ ૧·૧″ અને બીજો ભાગ ૬·૬″ કાપો.

§ ૨. સ્કેલ માપ.

(૧). બબ્બે શહેરોનાં અંતર પાતળી દોરીથી સીધી લીટીમાં માપો અને એકેક દોરીથી વારાફરતી સ્કેલ ઉપર ૦ થી શરૂ કરી ૬૦ કે ૮૦ પર્યંત ચોક્કશ અંતરો લો. સીધી લીટીમાં મુંબઇથી પુના ૧૦૫ માઇલ, અમદાવાદથી મદ્રાસ ૮૮૦ માઇલ, અને સુરતથી કરાંચી ૪૮૦ માઇલ છે.

(૨). પ્રશ્ન ૧ પ્રમાણે માપ લો. સીધી લીટીમાં મુંબઇથી કાશી ૮૫૦ માઇલ, કલકત્તાથી લાહોર ૧૦૫૦ માઇલ, નાગપુરથી મદ્રાસ ૫૯૦ માઇલ, અને અમદાવાદથી દિલ્હી ૫૪૦ માઇલ છે.

(૩). ઘરનું ચિત્ર ૭ ફુટ છે; કેળનું ચિત્ર ૬·૨ ફુટ છે; અને નાળીએરીનું ચિત્ર ૮·૩ ફુટ છે.

(૪). પર્વત ·૫૫" ઉંચો છે; એટલે ·૫૫×૮૦૦૦ ફુટ = ૪૪૦૦ ફુટ ઉંચો છે.

(૫). ૩·૫" લાંબી લીટી ૩½ માઇલ બતાવે છે.

(૬). ૩·૦" લાંબી આડી લીટી ૬ માઇલ રસ્તો બતાવે છે.

(૭). ૪·૫ સે. મી. લાંબી લીટી બે ગામોનું અંતર બતાવે છે.

(૮). ૧૦ સે. મી. લાંબી ઉભી લીટી વાંસની લંબાઇ બતાવે છે.

(૯). ·૩" = ૫ ફુટ; ∴ ૧૨૦ ફુટ = ૧૨૦ ÷ ૫ × ·૩" = ૭·૨" છે.

(૧૦). ૧" લાંબી अब લીટી દોરો. अब ને કાટખૂણે મળતી अड લીટી ·૫" લાબી દોરો. અને बक લીટી ·૫" લાંબી अडની બાજુએજ કાટખુણે દોરો ત્યારે अबकड લંબચોરસ છે.

(૧૧). અને (૧૨). પ્રશ્ન ૧૦ પ્રમાણે છોડો.

(૧૩). ૬ : ૧ નું પ્રમાણ એટલે પ્રકૃતિના ૬ ઈંચ કે સે. મી. = આકૃતિનો ૧ ઈંચ; કે ૧ સે. મી. તેથી ૯ ઈંચ = ૯ ÷ ૬ = ૧·૫" અને ૧૨" = ૧૨ ÷ ૬ = ૨" માટે પહેલો લંબચોરસ ૧·૫" × ૨" છે; બીજો ૩" × ૪"; ત્રીજો ૨" × ૨·૫"; છે. ચોથો ૪ સે. મી. × ૫ સે. મી.; અને પાંચમો ૫·૫ સે. મી. × ૮ સે મી. છે.

(૧૪). પહેલો ચોરસ ૧" ની બાજુ ઉપર છે; બીજો ૧·૫" ની. ત્રીજો ૨·૫", ચોથો ૩" ની બાજુ ઉપર છે. પાંચમો ૩, છઠ્ઠો ૪, સાતમો ૨, અને આઠમો ૪ સે. મી. ની બાજુ ઉપર છે. ૧ લો ચોરસ દોરવાને માટે अब ૧" ની લો. अब ને કાટખુણે बक ૧" ની અને अड ૧" ની એકજ બાજુએ દોરો. अबकड અનુક્રમે સીધી લીટીમાં સાંધો. अबकड ચોરસ છે. એજ પ્રમાણે બીજી આકૃતિઓ દોરવી.

(૧૫). ૧" = ૧૦૦ ફુટ; ∴ અંદરની લંબાઇ ૩૧૦ ફુટ = ૩·૧" અને પહોળાઈ ૧·૭" છે. માટે ૩·૧" × ૧·૭" નો એક अबकड લંબચોરસ દોરો. ભીંતની સાથે કિલ્લાની લંબાઇ ૩૧૦ + ૨૦ = ૩૩૦ ફુટ = ૩·૩", અને પહોળાઇ ૧૭૦ + ૨૦ = ૧૯૦ ફુટ = ૧·૯" છે. માટે अबकड લંબચોરસ બરાબર મધ્યમાં આવે તેમ તેની આસપાસ ૩·૩" × ૧·૯" નો पलरह બીજો લંબચોરસ દોરો. આખી આકૃતિ તળાવની આકૃતિ છે.

(૧૬). ૧૦ ફુટ = ૧" લો. ૨" × ૧·૫" નો अबकड લંબચોરસ

ઓરડો દોરો. **अक** અથવા **बड** માપો. દરેક ૨.૫" છે. તેથી એ અંતર ૨૫ ફુટ છે.

(૧૭. **कइ** એક આડી ક્ષિતિજ સમાન્તર લીટી જમીન બતાવે છે. **कइ** ને કાટખુણે **कड** એક અમર્યાદ ઉભી લીટી દોરો. **कब** ભાગ **कड** ભીંત ઉપર ૪૦ ફુટ = ૪ સે. મી. કાપો. અને **कइ** આડી લીટી ઉપર **कअ** = ૩૦ ફુટ = ૩ સે. મી. કાપો. ત્યારે **अब** સીડીની લંબાઇ થઇ. **अब** માપો. તે ૫ સે. મી. છે. માટે સીડી ૫૦ ફુટ લાંબી છે.

(૧૮). પ્રશ્ન ૧૭ પ્રમાણે આકૃતિ દોરો. **अब** માપો. જો સ્કેલ ૧૦ ફુટ=૧" હોય તો **अब** = ૩.૯" છે. તેથી સીડી ૩૯ ફુટ લાંબી છે.

(૧૯). **मअ** ઉત્તરમાં ૪.૫" માપો **अ** થી પૂર્વમાં ૧૦.૮" **अब** માપો. **मब** માપો. **मब** = ૧૧.૭" છે.

(૨૦). **म** થી **मप** પશ્ચિમમાં ૭.૫ સે. મી. લો. અને **प** થી ઉત્તરમાં **पअ** ૧૦ સે. મી. લો. **मअ** માપો. **मअ** = ૧૨.૫ સે. મી. છે.

(૨૧). ઉપરના પ્રશ્ન પ્રમાણે રચના કરો. મૂળ જગ્યાએથી લખોટો ૧૭.૧૬" દૂર છે.

(૨૨). ઉપરના પ્રશ્ન પ્રમાણે રચના કરો. જવાબ ૨૦.૮ માઇલ.

(૨૩). ઉપરના પ્રશ્ન પ્રમાણે રચના કરો. જવાબ ૩૧.૨ માઇલ.

(૨૪). **ब**થી પૂર્વમાં ૧.૨" લો. પછી ત્યાંથી દક્ષિણમાં ૧.૮" લો; અને ફરીથી ત્યાંથી પૂર્વમાં ૧.૨" લો. **अब** સીધી લીટી માપો. **अब** = ૩.૦" = ૩૦ માઇલ છે.

(૨૫). **अड** માપો, **अड**=૨૮.૬ માઇલ. સ્કેલ ૧" = ૧૦ માઇલ લો.

(૨૬). **बड** માપો, **बड** = ૧૧.૪ માઇલ, સ્કેલ ૧ સે.મી. = ૧૦ મા.

(૨૭). **अक** = ૨૧૫.૦૫ માઇલ છે. સ્કેલ ૧૦૦ માઇલ = ૧ ઇંચ લો.

(૨૮). સ્કેલ ૧૦ માઇલ = ૧ ઇંચ લો. **अब** = બે બંદરોનું અંતર = ૧૨ માઇલ = ૧.૨" લો. **अ**થી ઇશાનમાં **अक** દોરો અને **ब**થી વાયવ્યમાં **बक** દોરો, ત્યારે **क** આગળ વહાણ છે. **अक** = ૮.૪૮ માઇલ = **बक** છે.

(૨૯). **द** થી **दे** ઉત્તર દક્ષિણ દોરો **दे** થી પૂર્વમાં ૨૭ માઇલ = ૨.૭" **देम** લો. **म** થી **मद** વાયવ્યમાં દોરો. જો **मद** લીટી **देद** ને **द** માં મળે તો **द** આગળ દમણ છે. **ददे** અને **मद** માપો. **ददे** = ૨.૭" = ૨૭ માઇલ છે. **मद** = ૩.૮૨" = ૩૮.૨ માઇલ છે.

(૩૦). **अब** કોઇ પણ લીટી ઉત્તર દક્ષિણ લો. **ब** થી ઇશાનમાં **बक** લીટી દોરો હવે **अ** થી અગ્નિખુણાની લીટી **ब** થી ઇશાનખુણાની લીટી સાથે કાટખુણો કરે છે. વળી **बक** = ૧૫૦ ફુટ = ૧.૫" લો. **कअ** લીટી **बक** ને કાટખુણે દોરો. **कअ** માપો. **कअ** = ૧.૫" = ૧૫૦ ફુટ છે.

નોટ–આ પ્રશ્નમાં કાટખુણ સમદ્વિબાજુ △ છે,

---

§ ૩. ખૂણો. કાટખુણા ઉપરના પ્રશ્નો.

(૨). અને (૩). કાટખુણાઓ.

(૪). ઘડીઆળનાં ૩ અને ૬ આંકડા વચ્ચે વર્તુળનો ચોથો ભાગ રોકાય છે માટે કાટખુણો થાય છે.

(૫). વળી ૩ અને ૧૨ આંકડા વચ્ચે વર્તુળનો ચોથો ભાગ રોકાય છે. માટે કાટખુણો થાય છે.

(૬). ઉપરથી (અથવા નીચેથી) લેતાં ૩ અને ૯ આંકડાની વચ્ચે વર્તુળનો અર્ધો ભાગ રોકાય છે માટે બન્ને કાંટાની વચ્ચે દ્વિકાટખુણ અથવા બે કાટખુણા થાય છે.

(૭). ૬ અને ૧૨ આંકડા વચ્ચે અર્ધવર્તુળ રોકાય છે માટે બે કાટખુણા થાય છે.

(૮). ૫ અને ૨ આંકડા વચ્ચે વર્તુળનો ચોથો ભાગ રોકાય છે. માટે ૧ કાટખુણો થાય છે. વળી ૨ અને ૮ આંકડાની વચ્ચે અર્ધવર્તુળ રોકાય છે માટે બીજી વખતે બે કાટખુણા થાય છે.

ખુણા ઉપરના પ્રશ્નો.

(૯). પહેલો કાટખુણો; બીજો સાંકડો; ત્રીજો સાંકડો; ચોથો પહોળો; પાંચમો સાંકડો; છઠ્ઠો પહોળો; સાતમો પહોળો; આઠમો કાટખુણો; અને નવમો પહોળો ખુણો.

(૧૦). પહેલા, ત્રીજા, છઠ્ઠા અને સાતમા જુથોમાં બબ્બે ખુણા અરસપરસ કોટિખુણા છે; કારણ કે બન્ને મળી એક કાટખુણા બરાબર છે. બીજા, ચોથા અને પાંચમા જુથોમાં બબે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે; કારણ કે બબ્બે મળી બે કાટખુણા બરાબર છે.

(૧૨). પહેલો ખુણો ∠ बअक અથવા ∠ अ; બીજો પણ એજ પ્રમાણે લો. ત્રીજો ∠ल અથવા ∠अलक. ચોથો ∠प અથવા ∠ अपक. પાંચમો ∠अबक અથવા ∠ ब એજ પ્રમાણે બાકીના ખુણાઓનાં નામ આપો. છઠ્ઠામાં ∠अ અને ∠ब; સાતમામાં ૧ ને ૨, ૨ ને ૩; આઠમામાં ∠अ ને ∠ब, ∠ब ને ∠क પાસે પાસેના ખુણા છે.

(૧૪). ને (૧૫). પહેલો બીજાથી મોટો છે. અને ચોથો ત્રીજાથી મોટો છે

(૧૬) ચોથો ખુણો સૌથી મોટો; પહેલો તેનાથી નાનો છે; બીજો અને ત્રીજો બન્ને સરખા હોઇ સૌથી નાના છે.

(૧૭). પહેલો સૌથી મોટો; બીજો સૌથી નાનો છે.

(૧૮). બરાબર ખુણાઓ બને તો બધા કાટખુણા સરખાજ થવા જોઇએ.

(૨૧). ૯૦°; ૪૫°; ૩૦°; $\frac{૧}{૪}$ કાટખુણામાં ૨૨$\frac{૧}{૨}$°; $\frac{૧}{૫}$ માં ૧૮°; $\frac{૧}{૬}$ માં ૧૫°; $\frac{૧}{૯}$ માં ૧૦°; $\frac{૧}{૧૦}$ માં ૯°; $\frac{૧}{૧૫}$ માં ૬°; અને $\frac{૧}{૩૦}$ માં ૩° છે. વળી $\frac{૨}{૩}$ કાટખુણામાં ૬૦°; $\frac{૩}{૫}$ માં ૫૪°; $\frac{૪}{૧૫}$ માં ૨૪° છે.

(૨૨). ૩ વાગે ત્યારે મીનીટ કાંટો ૧૨ ઉપર અને કલાક કાંટા ૩ ઉપર છે. અને તે વખતે બન્ને કાંટા વચ્ચે વર્તુળનો $\frac{૧}{૪}$ ભાગ રોકાય છે. આ બન્ને કાંટા વચ્ચે કાટખુણો અથવા ૯૦° છે.

(૨૩). ઘડીઆળમાં આખા વર્તુળના બાર સરખા ભાગ કરેલા છે. માટે ૩૬૦°ના ૧૨ સરખા ભાગ કરીએ તો બબ્બે પાસેના અંકોની વચ્ચે ૩૬૦° ÷ ૧૨ = ૩૦° છે. ૫ વાગે ત્યારે બન્ને કાંટા વચ્ચે ૩૦ × ૫ = ૧૫૦° છે.

(૨૪). ૬ વાગે ત્યારે બન્ને કાંટા વચ્ચે ૩૦ × ૬ = ૧૮૦° છે. એટલે દ્વિકાટખુણ છે. એટલે કાટાંઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

(૨૫). ૨ વાગે ત્યારે ૩૦ × ૨ = ૬૦° છે; ૪ વાગે ત્યારે ૩૦ × ૪ = ૧૨૦° છે; ૮ વાગે ત્યારે (૧૨–૮=) ૪ × ૩૦ = ૧૨૦° છે; ૯ વાગે ત્યારે (૧૨–૯=) ૩ × ૩૦ = ૯૦° = કાટખુણો છે; ૧૧ વાગે ત્યારે (૧૨–૧૧=) ૧ × ૩૦ = ૩૦° છે. ૧૨ વાગે ત્યારે (૧૨–૧૨=) ૦ × ૩૦° = ૦° છે; એટલે બન્ને કાંટા એકમેક ઉપર છે. ૧ વાગે ત્યારે ૧ × ૩૦° = ૩૦° છે; વગેરે.

(૨૬) (૧) ૪૫°; (૨) ૪૫°; (૩) ૪૫°; (૪) ૪૫° + ૯૦° = ૧૩૫°; (૫) ૪૫° + ૯૦° = ૧૩૫°; (૬) ૪૫° + ૯૦° = ૧૩૫°; (૭) ૯૦° + ૯૦° = ૧૮૦°; (૮) ૯૦° + ૯૦° =૧૮૦° છે

(૨૭). ખુણાઓના આકાર બરાબર પાડો. એક સેટસ્કવેરમાં ખુણાઓ ૯૦°, ૬૦°, ૩૦° છે. અને બીજામાં ૯૦°, ૪૫°, ૪૫° છે.

(૩૦). ૧ લો ૫૮° + ૪૫° = ૧૦૩°; બીજો ૩૫° + ૨૧° = ૫૬°; ત્રીજો ૪૦° + ૬૭° = ૧૦૭°; ચોથો ૩૭° + ૭૮° = ૧૧૫° છે.

(૩૧). પહેલો ૩૩° + ૪૦° + ૫૪° = ૧૨૭°; બીજો ૩૦° + ૨૮° + ૬૬° = ૧૨૪°; ત્રીજો ૫૦° + ૩૯° + ૪૨° = ૧૩૧°; ચોથો ૩૧° + ૨૦° + ૪૦° = ૯૧° છે.

(૩૨). પાંચે ખુણાઓનો સરવાળો ૩૬૦° કે ચાર કાટખુણા છે.

(૩૩. દરેક વખતે સરવાળો ૩૬૦° કે ચાર કાટખુણા છે.

(૩૪). બધા ખુણાઓ સરખા છે. **અનુમાન-નિયમઃ**-કોઇ પણ વર્તુળમાં સરખા કૌંસની સામેના મધ્યબિંદુ આગળના ખુણા સરખા છે અને તેજ પ્રમાણે સરખા વર્તુળોમાં સરખાં કૌંસની સામેના મધ્યબિંદુ આગળના ખુણા સરખા છે.

૩૫. પહેલી આકૃતિમાં ૬૬° + ૬૬° + ૨૪° + ૨૪° = ૧૮૦° = બે કાટખુણા છે. બીજીમાં ૩૮° + ૧૪૨° + ૩૮° + ૧૪૨° = ૩૬૦° = ચાર કાટખુણા છે.

(૪૧). હા. મક લીટી અબ કૌંસને કમાં દુભાગે છે.

(૪૩). (૧) ૨૧૦°; (૨) ૨૧૦°; (૩) ૨૪૦°; (૪) ૨૪૦°; (૫) ૨૭૦°; (૬) ૨૭૦°; (૭) ૩૦૦°; (૮) ૩૦૦°; (૯) ૩૩૦°; (૧૦) ૩૩૦°.

(૪૬). અતિદ્વિકાટખુણ ૨૭૦° નો છે; કારણ કે ખુણાના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા મળી ૩૬૦° છે; અને તેમાં જો એક ખુણો ૧° હોય અને બીજો ૩° હોય તો નાનો ખુણો ૩૬૦° ÷ (૧ + ૩) = ૯૦° હોવો જોઇએ.

(૪૭). ૨૪૦°; ૨૮૮°; ૩૦૦°; ૩૧૫°; ૩૨૦°; ૩૨૪°; ૩૩૦°; અને ૩૩૬° છે.

§ ૪. સ્કેલમાપના વધારાના પ્રશ્નો.

(૧). ग માંથી પશ્ચિમ લીટી દોરો. અને તે પર गड = ·૯″ કાપો. ड થી ઉત્તરે अ બિંદુ डअ = ૧·૨″ લઈ મુકો. अ થી પશ્ચિમે अर = ૧·૭″ લો. रग = ૨·૮૯″ = ૨૮·૯ માઇલ છે. અને ∠अरग = ૨૪° = ∠डगर છે. તેથી गथी रનું કોણઅંતર પ૦ ૨૪° ઉ૦ છે.

(૨). अहड ઉત્તર દક્ષિણ દોરો. हअ = ૧·૨″ અને हड = ૨·૪″ કાપો. ड મધ્યબિંદુ લઇ ૪૨ માઇલ = ૪·૨″ ની ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ अ થી પશ્ચિમ જતી લીટીને कમાં છેદે છે, कह = ૨·૫૧″ = ૨૫·૧ માઇલ છે. कअ = ૨·૨″ = ૨૨ માઇલ છે. क થી डનું કોણઅંતર દ૦ ૩૧° પૂ૦ છે. અને क થી ह નું કોણઅંતર પૂ૦ ૨૮½° દ૦ છે.

(૩). अથી ઉત્તરે अन = ૫·૭ સે.મી. લો. ∠नअक ૪૫° નો કરી ઇશાન લીટી દોરો. अक = ૨·૪ સે.મી. લો. नक = ૪·૩૪ સે.મી. = ૪૩·૪ માઇલ છે. न થી कનું કોણઅંતર દ૦ ૨૨° પૂ૦ છે.

(૪). क બિંદુ अથી પૂ૦ ૭૫° ઉ૦ અથવા ઉ૦ ૧૫° પૂ૦ છે. क બિંદુ नથી પ૦ ૭૫° ઉ૦ અથવા ઉ૦ ૧૫° પ૦ છે.

(૫). न પશ્ચિમમાં અને अ પૂર્વમાં લો. नअ = ૧·૨″ લો. ∠अनक= ૪૫° અને ∠नअक = ૪૫° કરો. ત્યારે क સ્થળ પર વહાણ છે. कअ = कन = ·૮૬″ = ૮·૬ માઇલ છે. સ્કેલ ૧૦ માઇલ = ૧″.

૬. સ્કેલ ·૩″ = ૧ માઇલ લો. अक = ૨·૭૬″ = ૯·૨ માઇલ છે. अ થી क પ૦ ૫૮° દ૦ છે.

(૭). સ્કેલ ૧ સે.મી. = ૧ માઇલ લો. अग = ૯·૫ સે.મી. = ૯·૫ માઇલ છે. अ થી ग દ૦ ૨૭½° પૂ૦ છે.

(૮). સ્કેલ ૧૦ માઇલ = ૧″ લો. अन = ૩·૨૮″ = ૩૨·૮ માઇલ અને न થી अનું કોણઅંતર પૂ૦ ૨૭½° દ૦ છે.

(૯). સ્કેલ ૧૦ માઇલ = ૧″ લો. अड = ૩·૨૮″ = ૩૨·૮ માઇલ છે. अ થી डનું બેરીંગ પ૦ ૪૦° ઉ° છે.

(૧૦). સ્કેલ ૧૦૦ માઇલ = ૧″ લો. પૂર્વની લીટી ઉપર આગબોટ બે સ્થળ ઉપર મૂળ સ્થળથી ૧૫૦ = ૧·૫″ ઉપર આવી શકે છે. અને તેનાં પૂર્વનાં અંતર ·૭૭″ = ૭૭ માઇલ અને ૨·૭૪″ = ૨૭૪ માઇલ છે.

(૧૧) સ્કેલ ૧૦ માઇલ = ૧ સે. મી. લો. अड = ૮.૭૪ સે.મી. = ૮૭.૪ માઇલ છે. अ થી ड પૂ૦ ૫૮½° ઉ૦ છે.

(૧૨). સ્કેલ ૧૦ ફુટ = ૧" લો. अब વાડ સીધી લીટી લો. अबના કોઇપણ બિંદુ कथी કાટખુણે कड અંતર ૩.૫" = ૩૫ ફુટ લો. ત્યારે ड સ્થળ ઉપર ઘોડાને બાંધ્યો છે. ड મધ્યબિંદુથી ૪૫ ફુટ = ૪.૫" ની ત્રિજ્યાથી अब વાડને अ, ब માં છેદે તેમ એક વર્તુળ દોરો अब = ૫.૬૯" = ૫૬.૯ ફુટ છે. તેથી ઘોડો ૫૬.૯ ફુટ વાડ ચરી શકે છે.

(૧૩). સ્કેલ ૧૦૦ ફુટ = ૧" લો. अक = .૭૦૭" = ૭૦.૭ ફુટ છે.

(૧૪). अब ઉત્તર દક્ષિણ ૧૦ સે. મી. દૂર લો. (સ્કેલ ૧૦૦ ફુટ = ૧ સે. મી.) अ થી દ૦ ૨૦° ૫૦ अक દોરો ब થી ઉ૦ ૨૫° ૫૦ बक દોરો. अक = ૬.૧ સે મી. = ૬૧૦ ફુટ અને बक ૪૭૭ ફુટ છે.

(૧૫). કંપાસના બન્ને હાથો સરખા છે એમ ધાર્યું છે. बअक કંપાસની વચ્ચેનો ખુણો ૪૫° નો કરો. સ્કેલ ૧" = .૪" લો. अब = ૨.૪" = अक કાપો. बक = ૧.૮" = ૪.૫ ઇંચિ છે. તેથી કંપાસના છેડાઓ ૪॥ ઇંચિ દૂર હોય છે.

---

§.૫. આપેલા અંશ ઉપરથી ખુણો બનાવવાનું.

(૧). मअ કોઇપણ લીટી દોરો. म આગળ પ્રોટ્રેક્ટરનું મધ્યબિંદુ રાખી તથા मअ સાથે તેની સીધી કોર રાખી अ આગળના ૦° થી શરૂ કરી કોણમાપક ઉપરના ૨૫° ની નીચે એક બિંદુ क મુકો. मक સાંધો ત્યારે ∠अमक ૨૫°નો છે.

એ રીતે બીજા ખુણાઓ દોરો

(૩). ∠बअड = ૯૦° = ૧ કાટખુણો. એ બન્ને ખુણા પાસે પાસેના અને કોટિખુણા છે.

(૪). પહેલી, ત્રીજી, ચોથી, પાંચમી, છઠ્ઠી ને આઠમી જોડો કાટખુણા બનાવે છે. બીજી અને સાતમી જોડો કાટખુણા બનાવતી નથી.

(૫) કાટખુણો નથી.

(૬). કોઇ પણ જોડ કાટખુણો બનાવતી નથી; કારણ કે આપેલા બબ્બે ખુણા મળી ૯૦° થતા નથી.

(૧૪). પ્રશ્ન ૧૩ પ્રમાણે બધા ત્રિકોણો બનાવો. આ બધા ત્રિકોણોમાં એક બાજુ અને તેની ઉપરના બે ખુણા આપ્યા છે. ત્રીજો ખુણો (૧) માં ૮૮°; (૨) માં ૫૦°; (૩) માં ૭૦°; (૪) માં ૧૦૧°; (૫) માં ૫૫°; (૬) માં ૭૪°; અને (૭) માં ૪૧°; નો છે.

---

§ ૬. સીધી લીટીથી બનતા ખૂણા.

(૧). ૧૩૫°; ૧૬૩°; ૧૨૭°; અને ૮૭°.

(૨). ૧૦૫°.

(૩). ૫૧°.

(૪). ∠**अडक** + ∠**कडब** = ૧૮૦° = બે કાટખુણા છે. માટે એ બે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.

---

§ ૯. ત્રિકોણ.

(૧). (૧) ૫૦°; (૨) ૪૮°; (૩) ૭૦° (૪) ૪૦°; (૫) ૧૭°; (૬) ૪૨°; (૭) ૮૨°.

(૨). ૬૪°; ૬૬$\frac{૧}{૨}$°; ૭૭°; ૬૯°; ૫૬°; ૫૪°; ૬૯$\frac{૧}{૨}$°; ૮૨$\frac{૧}{૨}$°.

(૩). (૪). દરેક ખુણો ૬૦°.

(૫). (૧) હા; (૨) ના; (૩) ના; (૪) ના; (૫) ના; (૬) હા; (૭) હા; (૮) ના; (૯) ના;

(૬). કારણ કે ત્રણ ખુણાનો સરવાળો ૧૮૦° નથી.

(૭). (૧) ૨૪°, ૪૩°, ૧૦૫°; (૨) ૭૭°, ૫૩°, ૫૧°; (૩) ૨૯°, ૫૨°, ૧૦૦°; (૪) ૧૧૨°, ૩૨°, ૩૫; (૫) ૮૮°, ૭૨°, ૨૩°; (૬) ૪૨°, ૫૯°, ૯૦°; (૭) ૬૭°, ૪૧°, ૭૩°; (૮) ૧૧૩°, ૨૨°, ૪૭°; (૯) ૪૯°, ૪૭°, ૮૫°; (૧૦) ૮૩°, ૫૨°, ૫૪°.

આ સિવાય જે જોડનો સરવાળો ૧૮૦° ન હોય તેવી ગમે તે જોડ ચાલે.

(૮). સાંકડા ખૂણા કરતી બન્ને લીટીઓ જો અરસપરસ મળે તો ત્રિકોણ બને; એટલે સાંકડા ખૂણા જો બન્ને અંદરથી બને તો ત્રિકોણ બને.

(૯). ન બને; કારણ કે એમાં પાયા ઉપરના બેજ ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થઈ રહે છે.

(૧૦). ન બને; કારણ કે એમાં પાયા ઉપરના બે ખુણા મળીનેજ બે કાટખુણાથી મોટા થાય છે.

(૧૧). (૧); (૩); (૬); હોઇ શકે. બાકીના (૨); (૪); (૫); (૭); (૮); ન હોઇ શકે.

(૧૨). પાંચમો ત્રિકોણ કાટખુણ ત્રિકોણ છે; ત્રીજો અને સાતમો પહોળખુણ છે; બાકીના પહેલો, બીજો, ચોથો ને છઠ્ઠો સાંકડખુણ છે.

(૧૩). હા.

(૧૪). બન્ને સાંકડા ખુણા મળી ૯૦° છે. એ બે ખુણા અરસપરસ કોટિખુણા છે.

(૧૫). ૩૭°, ૫૩°, ૪૨°, ૧૯°, ૭૧°, ૩૧°, ૨૩°, કે ૫૧°.

(૧૭). ∠प = ૯૦° − ૪૨° = ૪૮°; ∠ळ = ૯૦° − ∠ = ૪૨°; ∠ई = ૯૦° − ૪૨° = ૪૮°.

(૧૮). અનુક્રમે લેતાં ∠ई = ∠प = ૫૫°, ૪૩°, ૩૭°, ૩૯°, ૭૧°, ૬૭°, ૧૯° છે. ∠ळ = ∠च છે.

(૧૯). ૧૬૦°; ૧૨૫°; ૮૧°; ૮૮°; ૧૪૭°; ૧૦૩°.

(૨૦). (૨૧). બાકીનો દરેક ખુણો (૩૬૦ − ૧૭૬) ÷ ૨ = ૯૨°; (૩૬૦ − ૧૧૨) ÷ ૨ = ૧૨૪°; (૩૬૦ − ૧૭૦) ÷ ૨ = ૯૫°; (૩૬૦ − ૧૭૦) ÷ ૨ = ૯૫°; (૩૬૦ − ૨૨૨) ÷ ૨ = ૬૯°.

(૨૨). ચોથો ૧° હોય તો ત્રીજો ૨°, બીજો ૪°, અને પહેલો ૮° હોવો જોઇએ. એટલે એકંદર ૧ + ૨ + ૪ + ૮ = ૧૫° માંથી એ પ્રમાણમાં બધા ખુણા હોવા જોઇએ. તેથી પહેલો ખુણો = ૩૬૦ × $\frac{૮}{૧૫}$ = ૧૯૨°; બીજો ૧૯૨ ÷ ૨ = ૯૬°; ત્રીજો ૯૬ ÷ ૨ = ૪૮°; અને ચોથો ૪૮ ÷ ૨ = ૨૪° છે.

(૨૩). બધા ખુણા સરખા છે તેથી દરેક ખુણો ૩૬૦ ÷ ૪ = ૯૦° = ૧ કાટખુણો.

(૨૪). ચોથો ૧૨° હોય તો પહેલો ૨૪°, બીજો ૭૨°, અને ત્રીજો ૭૨° હોવા જોઇએ; તેથી એકંદર ૧૨ + ૨૪ + ૭૨ + ૭૨ = ૧૮૦° માંથી એ પ્રમાણે બધા ખુણા હોવા જોઇએ. તેથી પહેલો ૪૮°, બીજો ૧૪૪°, ત્રીજો ૧૪૪° અને ચોથો ૨૪° છે.

(૨૫). ત્રીજો ખુણો ૧૮૦ ÷ ૩ = ૬૦° અને ચોથો ૧૨૦° છે.

(૨૬). સીધી લીટી આકૃતિમાં બધા અંદરના ખુણા = (૨ અ – ૪) કાટખુણા છે. તેથી નિયમિત ચતુષ્કોણમાં દરેક ખુણો = (૨ અ – ૪) × ૯૦° ÷ અ = (૨ × ૪ – ૪) × ૯૦° ÷ ૪ = ૯૦° = ૧ કાટખુણો.

(૨૭). નિયમિત પંચકોણમાં દરેક ખુણો = (૨ અ – ૪) × ૯૦ ÷ અ = (૨ × ૫ – ૪) × ૯૦° ÷ ૫ = ૧૦૮°;

નિયમિત ષટ્કોણમાં દરેક ખુણો = (૨ અ – ૪) × ૯૦° ÷ અ = (૨ × ૬ – ૪) × ૯૦° ÷ ૬ = ૧૨૦°;

નિયમિત અષ્ટકોણમાં દરેક ખુણો = (૨ અ – ૪) × ૯૦° ÷ અ = (૨ × ૮ – ૪) × ૯૦° ÷ ૮ = ૧૩૫°;

નિયમિન દશકોણમાં દરેક ખુણો = (૨ અ – ૪) × ૯૦° ÷ અ = (૨ × ૧૦ – ૪) × ૯૦° ÷ ૧૦ = ૧૪૪°;

નિયમિત દ્વાદશકોણમાં (૨ અ – ૪) × ૯૦° ÷ અ = (૨ × ૧૨ – ૪) × ૯૦° ÷ ૧૨ = ૧૫૦° દરેક ખુણો છે.

(૨૮). સીધી લીટી આકૃતિના બધા બહારના ખુણા મળી ચાર કાટખુણા કે ૩૬૦° છે. માટે નિયમિત ચતુષ્કોણમાં દરેક બહારનો ખુણો ૩૬૦° ÷ ૪ = ૯૦°; પંચકોણમાં તે ખુણો ૩૬૦° ÷ ૫ = ૭૨°; ષટ્કોણમાં તે ખુણો ૩૬૦° ÷ ૬ = ૬૦°; સપ્તકોણમાં ૩૬૦° ÷ ૭ = ૫૧૩/૭°; અષ્ટકોણમાં તે ખુણો ૩૬૦° ÷ ૮ = ૪૫°; અને નવકોણમાં તે ખુણો ૩૬૦° ÷ ૯ = ૪૦°; અને દશકોણમાં તે ખુણો ૩૬૦° ÷ ૧૦ = ૩૬° છે.

(૨૯). બાકીના બે ખુણા ૩૬૦° – ૨૦૦° = ૧૬૦°; ∴ તેની દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો ૧૮૦° – ૧૬૦° ÷ ૨ = ૧૦૦° છે.

(૩૦). માગેલો ખુણો ૧૮૦° – ૧૭૦° ÷ ૨ = ૧૮૦° – ૮૫° = ૯૫° છે.

(૩૧). પંચકોણના બધા ખુણા મળી (૨ × ૫ – ૪) × ૯૦° = ૫૪૦° માટે બાકીના બે ખુણા ૫૪૦° – ૮૦° × ૩ = ૩૦૦° છે. માટે બાકીનો દરેક ખુણો ૩૦૦° ÷ ૨ = ૧૫૦° છે.

(૩૨). ચાર પૈકી કોઇ પણ ૨° હોય તો પાંચમો ૧° છે. માટે ચાર પૈકી કોઇ પણ ૫૪૦° × ૨/૯ = ૧૨૦° છે; અને પાંચમો ૬૦° છે.

(૩૩). ત્રણ સરખા ખુણા પૈકી કોઇ પણ ૨° હોય તો ચોથો ૧° છે અને પાંચમો ૩° છે. માટે પહેલો, બીજો કે ત્રીજો ખુણો ૫૪૦° × ૨/૧૦ = ૧૦૮° છે; ચોથો ૫૪° છે; અને પાંચમો ૧૬૨° છે.

(૩૪). ષટ્કોણમાં બધા ખુણા મળી (૨ × ૬ – ૪) × ૯૦° = ૭૨૦° છે. પહેલા ત્રણમાંનો કોઇ પણ ૨° હોય તો બાકીનો દરેક ૧° છે. માટે

પહેલો, બીજો, કે ત્રીજો ખુણો ૭૨૦° × ૨/૯ = ૧૬૦° છે; અને ચોથો, પાંચમો કે છઠ્ઠો ખુણો ૮૦° છે.

(૩૫). જો અ બાજુની સંખ્યા હોય તો

(૧). ૧૦૮° × અ = (૨ × અ − ૪) × ૯૦°;
∴ ૩૬૦ = ૧૮૦ અ − ૧૦૮ અ − ૭૨ અ;
∴ અ = ૫ બાજુ છે.

(૨). ૧૭૦° × અ = (૨ × અ − ૪) × ૯૦°;
∴ ૩૬૦ = ૧૮૦ અ − ૧૭૦ અ;
∴ અ = ૩૬ બાજુ છે.

(૩). ૧૪૦° × અ = (૨ × અ − ૪) × ૯૦°;
∴ ૩૬૦ = ૧૮૦ અ − ૧૪૦ અ;
∴ અ = ૯ બાજુ છે.

(૪). ૧૫૦° × અ = (૨ × અ − ૪) × ૯૦°;
∴ ૩૬૦ = ૧૮૦ અ − ૧૫૦ અ;
∴ અ = ૧૨ બાજુ છે.

(૩૬). ઓછામાં ઓછી બાજુવાળો સમકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે. તેનો દરેક ખુણો ૬૦° છે.

(૩૭). (૧) ૩૬૦ ÷ ૩૦ = ૧૨ બાજુ; (૨) ૩૬૦ ÷ ૪૦ = ૯બાજુ; (૩) ૩૬૦ ÷ ૧૫ = ૨૪ બાજુ; (૪) ૩૬૦ ÷ ૯૦ = ૪ બાજુ; (૫) ૩૬૦ ÷ ૨૪ = ૧૫ બાજુ; (૬) ૩૬૦ ÷ ૧૦ = ૩૬ બાજુ.

(૩૮). કોઇ પણ સીધી લીટી આકૃતિની બાજુની સંખ્યાનો અંક પૂર્ણાંક હોવો જોઇએ.

૧૧° ના બહારના ખુણાના સમ બહુકોણમાં ૩૬૦ ÷ ૧૧ = ૩૨ ૮/૧૧ બાજુ હોવી જોઇએ. અને એ અશક્ય છે

તેમજ ૧૩° ના બહારના ખુણાનો સમ બહુકોણ અશક્ય છે.

૧૫° ના બહારના ખુણાના સમ બહુકોણમાં ૩૬૦ ÷ ૧૫ = ૨૪ બાજુ છે; અને ૨૪ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે; માટે એ શક્ય છે.

૩૩° ના બહારના ખુણાનો સમ બહુકોણ અશક્ય છે.

(૩૯). મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી હોય છે. માટે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણો બધા ખુણાઓમાં મોટો હોવાને લીધે તેની સામેની બાજુ કર્ણ સૌથી મોટી હોય છે.

(૪૦). પહોળો ખુણો સૌથી મોટો છે; માટે તેની સામેની બાજુ સૌથી મોટી છે.

(૪૧). નીચે પ્રમાણે કોઠો બનાવી જવાબ લખોઃ—

ત્રિકોણ.	સાંકડખુણ છે?	કાટખુણ છે?	પહોળખુણ છે?
સમબાજુ ત્રિકોણ.	હા.	ના.	ના.
સમદ્વિબાજુત્રિકોણ.	હા.	હા.	હા.
વિષમબાજુત્રિકોણ.	હા.	હા.	હા.

§ ૧૧. સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ.

(૧). ૫.૭ સે. મી. ની **अब** દોરી **अब** ને કાટખુણે **अड**, **बक** દોરો. **अड** = **बक** = **अब** કરો. **अबकड** ચોરસ છે.

એજ રચનાએ બીજા ચોરસો દોરો.

(૨). **अब** = ૩.૨ સે. મી. લો. **अब** ને કાટખુણે **अड**, **बक** દોરો. **अड** = **बक** = ૭ સે. મી. દોરો. ત્યારે **अबकड** લંબચોરસ છે.

એજ રચનાએ બીજા લંબચોરસો દોરો.

(૩). **अब** = ૫.૧″ દોરો ∠**अबक** = ૫૧° નો કરો. **बक** = **अब** કરો. **अ** માંથી **बक** સમાન્તર **अड** દોરો. અને **क** માંથી **अब** સમાન્તર **कड** દોરો. **अबकड** રોમ્બસ છે.

એજ રચનાએ બીજા રોમ્બસો દોરો.

(૪). **कड** = ૪.૩″ લો. ∠**कडअ** = ૩૫ કરો. **डअ** = ૭.૫″ કરો. **अबकड** સ. ચ. પુરો કરો.

એજ રચનાએ બીજા સ. ચ. દોરો.

(૫). બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા છે.

(૭). સમચોરસ ચોકઠાને મચડવાથી રોમ્બસ થાય છે.

(૮). પ્રશ્ન ૨ પ્રમાણે દોરો.

(૯). પ્રશ્ન ૪ પ્રમાણે દોરો

(૧૦). (૧). अब = ૬·૩ સે. મી. ની દોરો. ∠अबक = ૮૨° નો કરો. बक = ૮·૨ સે. મી. ની કાપો. ∠क = ૯૦° કરો. कड = ૭·૭ સે. મી. ની કાપો. अबकड માગેલો ચતુષ્કોણ છે.

(૨). अब = ૪·૧", ∠अ = ૬૫°, ∠ब = ૯૦°, बक = ૩·૫", अड = ૨·૭" કરો.

(૩). बक = ૨·૧", ∠ब = ૧૧૨°, ∠क = ૯૧°, कड = ૨·૭", ∠ड = ૯૯° કરો.

(૪). अब = ૪·૭", ∠ब = ૧૧૫°, ∠अ = ૭૧°, अड = ૫·૧" અને ∠ड = ૩૬૦ − ૧૧૫° − ૭૧° − ૫૫° = ૧૧૯° કરો.

(૫). ∠ड = ૩૬૦° −(∠अ + ∠ब + ∠क)= ૩૬૦° − ૭૫° − ૯૧° − ૭૨° = ૧૨૨° છે.

(૬). ∠अबक = ૧૧૫°, बअ = ૨·૭", बक = ૨·૩" કરો. अक સાંધો. अ મધ્યબિંદુ અને ૩·૪" ની ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરો. क મધ્યબિંદુ અને ૪·૩" ની ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરો. આ બે વર્તુળ ड માં છેદે તો अबकड ચતુષ્કોણ માગેલો ચ. છે.

(૭). ∠अ = ૭૫°, અ = ડ = ૪·૯ સે. મી. કરો. ∠ब = ૫૧° કરો. ड મધ્યબિંદુ અને ૪·૯ સે. મી. ની ત્રિજ્યાના વર્તુળને बकને कમાં મળવા દો. ત્યારે अब कड માગેલો ચતુષ્કોણ છે.

(૮). પ્રશ્ન (૭) પ્રમાણે કરો.

(૯). ∠ब = ૭૫° કરી अबक △ કરો. પછી अडक △ કરો.

(૧૦). ∠ब = ૭૨°, અ = ૨·૭", બ = बक = ૩·૩" કરો. ∠अ = ૭૧°, ∠क = ૧૧૩° કરો.

(૧૧). (૧) અ = ૭·૨ સે. મી, ક = ૩·૯ સે. મી., चड = ૪·૨ સે. મી. કરી अचड △ કરો. પછી बकड △ કરો.

(૨). (૧) પ્રમાણે કરો.

(૩). (૧) પ્રમાણે કરો.

(૪). ∠च = ૭૨°, અ = ૫·૧″, બ = ૬·૨″, કરો. ∠क = ૫૧°, ક = ૬·૦″ કરો. अड સાંધો.

(૫). अबक △ કરો. ∠बअड = ∠अ = ૧૫૨° કરો. મધ્યબિંદુ અને कड = ક = ૩·૭″ ની ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ अडને ડમાં છેદે છે.

ખંડ ૨ જો. સિદ્ધ ભાગ; પ્રમેય ભાગ.

§ ૧૩. સીધી લીટી અને ખુણો.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧ લો.

(૧). બે ન્યૂનતાપૂરક ખુણાનો સરવાળો ૧૮૦° છે; માટે એક ખુણો જો ૨૭°, હોય તો બીજો–તેનો ન્યૂનતાપૂરક–ખુણો ૧૮૦°–૨૭° = ૧૫૩° છે; એજ પ્રમાણે બાકીનાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણાઓ ૧૮૦° માંથી એ ખુણા અનુક્રમે બાદ કરવાથી મળશે; જેવા કે, ૧૨૭°, ૬૮°, ૧°, ૧૫૯°, ૧૨૧°, ૭૯° અને ૧૨૮°.

(૨). બે કોટિખુણા મળી ૯૦° છે; માટે એક જો ૧૨° હોય તો બીજો ૯૦°–૧૨ છે, એટલે ૭૮° છે. તેજ પ્રમાણે બાકીનાના કોટિખુણા અનુક્રમે ૬૭°, ૪૧°, ૩૫° છે.

(૩). अमब લીટી લઇ તેના પર कमड એક લીટી સેટસ્કવેરથી કાટખુણે દોરો. ધારો કે ∠अमक એક કાટખુણો છે ત્યારે ∠अमक + ∠बमक = ૨ કાટખુણા; અને ∠अमक = ૧ કાટખુણો તેથી ∠बमक = ૧ કાટખુણો. એજ પ્રમાણે બબ્બે પાસે પાસેના ખુણા લેવાથી ∠कमड, અને ∠डमअ પણ કાટખુણા થાય છે.

(૪). ∠अमब, ∠कइड બે સરખા સાંકડા ખુણા લો. मप ને अम ઉપર (ब તરફ), અને इलને कइ ઉપર (ड તરફ), લંબ દોરો. ત્યારે

∠बमप, ∠अमबनो, અને ∠डइल, ∠कइडનો કોટિખુણો થયો. અને ∵ ∠अमप = ૧ કાટખુણો = ∠कइल, ∴ આ બે સરખા ∠अमप, ∠कइल માંથી આપેલા બે સરખા ∠अमब, ∠कइड અનુક્રમે લઇ લઇએ તો બાકીના તેઓના કોટિખુણા ∠बमप, ∠डइल પણ સરખા છે.

(૫). अमब, ∠कइड બે સરખા ખુણા લો. अम ને प સુધી અને कइ ને ल સુધી લંબાવો. ત્યારે ∠अमब + ∠बमप = ૨ કાટખુણા (સિ. ૧); અને ∠कइड + डइल = ૨ કાટખુણા (સિ. ૧) તેથી ∠अमब + ∠बमप = ∠कइड + ∠डइल (પ્ર. પ્ર.). પણ ∠अमब = ∠कइड; તેથી ∠बमप = ∠डइल. અને આ ખુણા આપેલા ખુણાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

(૬). बक ને ब તરફ ड સુધી અને क તરફ इ સુધી લંબાવો. ब આગળના બે ખુણા = ૨ કાટખુણા, અને क આગળના બે ખુણા = ૨ કાટખુણા; માટે ∠अबक + ∠अबड = ∠अकब + ∠अकइ છે. તેથી ∠अबड = ∠अकइ છે; ∵ ∠अबक = ∠अकब.

(૭) अबને ड સુધી અને अकને इ સુધી લંબાવો ∵ ब આગળના બે ખુણા = ૨ કાટખુણા = क આગળના બે ખુણા; અને ∵ ∠अबक = ∠अकब છે; ∴ ∠डबक = ∠इकब છે.

(૮). अब લીટીને कड લીટી कમાં મળવા દો. ∠अकड ને कपથી, અને ∠बकडને कल થી દુભાગો. ∵ ∠अकप = ∠पकड, અને ∠बकल = ∠लकड, ∴ ∠अकप + ∠बकल = ∠पकड + ∠लकड. પણ ∠अकप + ∠पकड + ∠लकड + ∠बकल = ૨ ∟ = ૧૮૦°; ∴ ∠पकड + ∠लकड = ૯૦°. ∴ कप, कल કાટખુણે છે.

(૯). દરેક ખુણો ૭૫° છે અને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો એ બન્ને ખુણાના સરવાળાથી અર્ધો છે માટે એ ખુણો ૭૫°નો છે.

(૧૦). પ્રશ્ન ૮ પ્રમાણે સિદ્ધ કરતાં માલમ પડશે કે એ ખુણો (૭૨° + ૧૦૮°) ÷ ૨ = ૯૦° છે.

(૧૧). ∠अमब = ૬૭°, ∠बमक = ૧૧૦° અને ∠कमड = ૩૩° લો. ∠अमबને मपથી, ∠बमकને मलથી અને ∠कमडને मरથી દુભાગો. ત્યારે ∠अमप = ∠पमब = ૩૩½° અને ∠डमर = ∠रमक = ૧૬½° છે. ∴ ∠पमर = ૩૩½ + ૧૧૦ + ૧૬½ = ૧૬૦°.

(૧૨). પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે લેતાં ∠पमल = ૩૩½ + ૫૫ = ૮૮½°; ∠लमर = ૫૫ + ૧૬½ = ૭૧½°; અને ∠पमर = ૧૬૦°.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨ જો.

(૧). ∠**अबक** = ૬૫° અને ∠**अबड** = ૧૧૫° કરો. ત્યારે એ બે ખૂણા મળી ૧૮૦° છે, એટલે બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી પ્ર૦ સિ૦ ૨ પ્રમાણે **कबड** એકજ સીધી લીટી છે.

(૨). પ્રશ્ન ૧ પ્રમાણે રચના કરો પણ દરેક ખુણો કાટખૂણો કરો. ત્યારે ∠ **अबक** + ∠ **डबक** = ૨ કાટખૂણા છે. ∴ **अबड** એકજ સીધી લીટીમાં છે. (પ્ર૦ સિ૦ ૨).

(૩). **बअक** કોઇ પણ ખૂણો ૬૦° નો કરો. અને **बअ** = ૨″, **अक** = ૨″ કાપો. **बक** સાંધો. ∠**बअक** માંથી ∠**बअड** (૬૦ ÷ ૨) = ૩૦° નો કરો. **बड** = ૧″ અને **कड** = ૧″ થાય છે. ∠**अडब** અને ∠**अडक** દરેક ૯૦° કે કાટખૂણો થાય છે. તેથી ∠**अडक** ∠**अडब** નો ન્યૂનતાપૂરક છે: અને ∠**अडब** નો કોટિખૂણો થતો નથી, કારણ કે તે કાટખૂણો છે.

(૪). **अबक** લીટી લઈ ∠**अबड** કોઇ પણ ખુણો કરો; અને તેવડોજ ∠**कबइ** પણ વિરૂદ્ધ બાજુએ કરો. **अबक** સીધી લીટી છે. માટે ∠**अबइ** + ∠**कबइ** = ૨ કાટખુણા. અને ∠**कबइ** = ∠**अबड** (પ્રતિજ્ઞા); ∴ ∠**अबइ** + ∠**अबड** = ૨ કાટખુણા. ∴ **डबइ** સીધી લીટી છે.

(૫) **अब** ની વિરૂદ્ધ બાજુએ ∠**अबक** અને ∠**अबड** એવા ખુણા કરો કે તેઓને દુભાગનારી **बइ**, **बफ** લીટીઓ કાટખુણે મળે. ∵ ∠**अबफ** = ∠**फबड** અને ∠**अबइ** = ∠**इबक**; ∴ **अबक** + ∠**अबड** = ૨ × (∠**अबइ** + ∠**अबफ**). પણ ∠**अबइ** + ∠**अबफ** = ૧ કાટખુણો. ∴ ∠**अबक** + ∠**अबड** = ૨ કાટખુણા ∴ **कबड** એકજ સીધી લીટીમાં છે.

(૬). **अमब**, **कमड** બે લીટી **म**માં છેદે તેમ દોરો. ∠**अमड**ને **मइ**થી અને ∠**कमब**ને **मफ**થી દુભાગો. ∠**अमक**ના બે ન્યૂનતાપૂરક ∠**अमड** અને ∠**कमब** બરાબર છે. (પ્ર. સિ. ૧ પ્રશ્ન ૫) અને આ ∠**अमड** અને ∠**कमब** ને **मइ** અને **मफ** દુભાગે છે માટે ∠**डमइ** = ∠**कमफ** ∵ સરખા ખુણાના તેઓ અર્ધા ભાગ છે. ∴ ∠**अमक** + ∠**अमड** = ∠**इमक** + ∠**कमफ**. પણ એમાંની પહેલી જોડ બે કાટખુણા બરાબર છે. માટે બીજી જોડ પણ બે કાટખુણા બરાબર છે. માટે **इमफ** એકજ સીધી લીટી છે.

(૭). **म** આગળ પેન્સીલને પકડી છે એમ ધારો. **अमब** પેન્સીલની કોઇપણ સ્થિતિ લો અને **कमड** પેન્સીલની બીજી સ્થિતિ લો. ત્યારે **अमब**

અને कमड એ સીધી લીટી म માં છેદતી થઇ. માટે ∠अमडના બે ન્યૂનતાપૂરક ∠अमक અને ∠डमब બરાબર છે (પ્ર. સિ. ૧ પ્રશ્ન ૫).

(૮). દરેક જવાબ–બે કાટખુણા કે ૧૮૦°.

(૯). બે બે ખુણા મળી ૭૨° + ૧૦૯° = ૧૮૧° થાય છે; એટલે બન્ને ખુણા મળી બે કાટખુણા કરતાં મોટા છે; ∴ દરેક ખુણો બીજાનો ન્યૂનતાપૂરક નથી.

(૧૦). બે સીધી લીટીઓ છેદે તો તેઓ એકજ બિંદુમાં છેદી શકે છે. અને તેઓ ચાર ખુણા બનાવે છે, જેમાંના બબ્બે સામસામેના છે. તેથી સામસામેના ખુણાની બે જોડ થાય છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૩ જો.

(૧). अब ઉપર मक પડે છે, ∴ ∠अमक + ∠बमक = ૨ કાટખુણા (પ્ર. સિ. ૧) અને कड ઉપર मअ પડે છે, ∴ ∠अमक + ∠डमअ = ૨ કાટખુણા (પ્ર. સિ. ૧). ∴ ∠अमक + ∠कमब = ∠अमक + ∠अमड. ∴ બન્ને જોડમાંથી એકજ ∠अमक લઇ લેતાં ∠कमब = ∠अमड.

(૨). अबक △ની बकને ब તરફ ड સુધી અને क તરફ इ સુધી, कअને अ તરફ ल સુધી અને क તરફ फ સુધી, અને अबને अ તરફ प સુધી અને ब તરફ र સુધી, લંબાવો. अ, ब, क આગળના સામસામેના ખુણા બરાબર છે. માટે ∠अबक = ∠डबर અને ∠अबड = ∠रबक; ∠अकब = ∠इकफ અને ∠अकइ = ∠बकफ; અને ∠बअक = ∠लअप અને ∠बअल = ∠कअप.

(૩). ∠अ = ∠इ; અને ∠अ = ∠फ (પ્ર. સિ. ૩); ∴ ∠इ = ∠फ (પ્ર. પ્ર.) ∠ब = ∠ल; અને ∠ब = ∠इ ને ∠ल = ∠क; ∴ ∠इ = क. ∠ब + ∠फ = ૨ કાટ. = ∠ल + ∠ड; અને ∠ब = ∠ल; ∴ ∠फ = ∠ड. અને ∠ब = ∠इ અને ∠ब = ∠ल; ∴ ∠इ = ∠ल. ∠इ + ∠फ + ∠प + ∠ल = ૪ કાટ. અને ∠इ + ∠प = ૨ કા. ∴ ∠फ + ∠ल = ૨ કાટખુણા છે. ∠ब + ∠फ + ∠ल + ∠ड = ૪ કાટ. અને ∠फ + ∠ल = ૨ કાટ. ∴ ∠ब + ∠ड = ૨ કાટખુણા છે. ∠अ + ∠इ + ∠प + ∠क = ૪ કાટ. અને ∠इ + ∠प = ૨ કાટ. ∴ ∠अ + ∠क = ૨ કાટખુણા છે.

(૪). अब,कडने म માં છેદવા દો. અને ∠कमबने मइथी દુભાગી इमने र સુધી લંબાવેા. अब સીધી લીટીને रइ સીધી લીટી म માં છેદે છે; ∴ ∠अमर = ∠बमइ (પ્ર. સિ. ૩) અને તેમજ ∠कमइ = ∠रमड; પણ ∠कमइ = ∠बमइ; ∴ ∠अमर = ∠रमड. ∴ मर એટલે इमर, ∠अमबના સામેના ખુણા अमडने દુભાગે છે. તેમજ ∠अमकને દુભાગનારી લીટી ∠बमडને પણ દુભાગે છે.

(૫). अब,कड એ સીધી લીટી म માં છેદે છે. ∠कमबने मइथी અને ∠अमडને रमથી દુભાગેા. ∠अमड = ∠कमब (પ્ર. સિ. ૩) ∴ તેના અર્ધા ∠अमर અને ∠बमइ પણ બરાબર છે. અને ∠अमक + ∠कमब = ૨ કાટ. માટે ∠अमक + ∠कमइ + ∠अमर (=∠बमइ) = ૨ કાટ. માટે પ્ર. સિ. ૨ પ્રમાણે रम,मइ એકજ સીધી લીટીમાં છે. તેમજ ∠अमक, ∠डमबને દુભાગનારી લીટીઓ પણ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

(૬). (૧). ∠अमक = ૬૧°, ∴ ∠डमब = ૬૧° (પ્ર. સિ. ૩). અને ∠अमड = ૧૮૦° − ∠अमक = ૧૮૦° − ૬૧° = ૧૧૯° = ∠कमब (પ્ર. સિ. ૧)

(૨). ∠अमक + ∠बमड = ૨૨૦°, અને ∠अमक = ∠बमड. ∴ ∠अमक = ૧૧૦° = ∠डमब. અને (૧) પ્રમાણે ∠अमड = ૧૮૦° − ૧૧૦° = ૭૦° = ∠कमब.

(૩). ∠अमक + ∠अमड + ∠डमब = ૨૩૧°, અને ∠अमक + ∠अमड = ૧૮૦°; ∴ ∠डमब = ૨૩૧° − ૧૮૦° = ૫૧°; ∴ (૧) પ્રમાણે ∠अमक = ૫૧°; ∠अमड = ૧૮૦° − ૫૧° = ૧૨૯° = ∠कमब.

(૭). ∠अबड = ∠डबक. ∴ ∠अबक ને એવડ વાળતાં ∠अबड, ∠डबक પર બરાબર પડશે. ∴ अब, बक ઉપર પડશે. વળી बड એવી રીતે દોરીએ કે ∠अबड, ∠डबक થી મોટો હોય તો अब, बक ની બહાર પડશે; અને નાનો હોય તો તે અંદર પડશે.

(૮). જે ખૂણો ૧૫° નેા છે તેની પાસેનેા દરેક ખુણેા ૧૮૦°−૧૫° = ૧૬૫° છે (પ્ર. સિ. ૧); અને તેની સામેનેા ખુણેા ૧૫° છે. (પ્ર. સિ. ૩)

(૯). अब, कड, रप ત્રણ લીટીઓ ग માં છેદે અને ∠अगक = ૨૫°, અને ∠कगर = ૬૧° કરે, તેા ∠रगब = ૧૮૦° − ૨૫° − ૬૧° =

૯૪° = ∠ अगप; ∠ पगड = ∠ कगर = ૬૧°; અને ∠ डगब = ∠ अगक = ૨૫°.

(૧૦). **अबकड** ચતુષ્કોણની **अब** ને **इ** સુધી, **बक** ને **प** સુધી, **कड** ને **ल** સુધી અને **डअ** ને **र** સુધી લંબાવી છે. અને બહારનો ∠**डकप** = ૮૬°, ∴ ∠**डकब** = ૧૮૦° − ૮૬° = ૯૪°, બહારનો ∠**लडअ** = ૧૧૫°, ∴ ∠**अडक** = ૧૮૦° − ૧૫૦° = ૬૫°; બહારનો ∠**रअब** = ૭૫°, ∴ ∠**बअड** = ૧૮૦° − ૭૫° = ૧૦૫°; અને બહારનો ∠**कबइ** = ૮૪°, ∴ ∠**अबक** = ૧૮૦° − ૮૪° = ૯૬°.

(૧૧). પાસેના ખુણા ૧૮૦° માંથી આપેલા ખુણા બાદ કરવાથી અનુક્રમે મળે છે. ∴ પાસેના ખુણા = ૧૫૩°, ૬૮°, ૧૦૩°, અને ૧૩૨° છે. (પ્ર. સિ. ૧) અને સામેના ખુણા આપેલા ખુણા જેવડા છે.

---

§ ૧૪. સમાન્તર સીધી લીટી.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૪ થો અને ૫ મો.

(૧). **अब** સીધી લીટી પર **पअ**, **मब** બન્ને કાટખુણે પડે છે એવી આકૃતિ દોરો. હવે **अब** આડી લીટીની એકજ બાજુ પર ∠**पअब** + ∠**मबअ** = ૨ કાટખુણા છે; અને આ માંહેના એકજ બાજુ તરફના ખુણા છે માટે પ્ર. સિ. ૫ ના (૨) જા ભાગ પ્રમાણે **पअ** ‖ **मब** છે.

જો **अब** ની વિરૂદ્ધ બાજુ પર **पअ**, **बम** પડે તો ∠**पअब** = ૧ ∟ = = ∠**अबम**; અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે માટે પ્ર. સિ. ૪ પ્રમાણે **पअ** ‖ **मब** છે.

(૨). **अबक**, **डइफ**, **लरम** ત્રણ સમાન્તરો દોરો અને તેને કાટખુણે મળે તેમ **अडल**, **बइर**, **कफम** દોરો. પ્રશ્ન ૧ પ્રમાણે **अडल**, **बइर**, **कफम** સમાન્તરો છે, કારણ કે તેઓ સઘળી એકજ લીટીઓને લંબ છે. માટે **अबइड**, **बकफइ**, **इफमर**, અને **डइरल**માં સામસામેની બાજુઓ સમાન્તર છે. માટે તેઓ ‖ કોણો છે. એ પ્રમાણે વધારે સીધી લીટીઓ લઇ સિદ્ધતા કરી લેવી.

(૩). આપેલા પક્ષ પ્રમાણે આકૃતિ દોરો. **अक** આડી લીટી સાથે **अब**, **डक**, અનુક્રમે વ્યુત્ક્રમ ∠ઓ **बअक**, **अकड** બરાબર કરે છે; માટે **अब** ‖ **कड** [પ્ર. સિ. ૪] એજ રીતે **अड** ‖ **बक** ∴ **अबकड** ‖ કોણ છે.

(૪). ફેરવીને મૂળ આકૃતિ ઉપર ફેરવેલી–ઉલટાવેલી આકૃતિ મૂકતાં **अब**, **बअ** ઉપર; **अड**, **बक** ઉપર; અને **डक**, **कड** ઉપર બરાબર મળી જશે. માટે **अब** અને **कड** ની દિશા એકજ છે. માટે **अब** ‖ **कड** છે.

(૫). **अबर** દોરો. **ब**, અને **अ** આગળ એકેક સીધી લીટી રાખી આ લીટીઓ ઘડિઆળના કાંટાની ઉલટી દિશામાં ફેરવો. જેવડા ખુણામાંથી **बइ** લીટી (∠**इबर** માંથી) ફરે છે તેવડાજ ખુણામાંથી (∠**लअब**માંથી) **अल** પણ ફરે તો પ્રત્યક્ષ રીતે **बइ** જે દિશામાં રહે છે તેજ દિશામાં **अल** પણ ફરે તો પ્રત્યક્ષ રીતે **बइ** જે દિશામાં રહે છે તેજ દિશામાં **अल** પણ રહે છે. અને એકજ દિશામાં રહેલી લીટીઓ સમાન્તર છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૬ ઠ્ઠો.

(૧). **अब**, **कड**, **इफ** સમાન્તરો દોરો. તેને **व**, **ग**, **य**માં અનુક્રમે છેદે તેમ **व ग य** એવી એક આડી લીટી દોરો કે તે **अब**ને લંબ હોય. હવે **अब** ‖ **कड** અને **वग** તેને છેદે છે માટે ∠**बवग** + ∠**वगड** = ૨ ∟. અને ∠**बवग** = ૧ કાટ. (પ્રતિજ્ઞા); માટે ∠**वगड** પણ કાટખુણો છે તેજ પ્રમાણે ∠**गयफ** પણ કાટખુણો છે માટે **वगय** બધી સમાન્તરોને લંબ છે.

(૨). **अब**, **कड** સમાન્તર છે માટે તેઓની દિશા એકજ છે. અને આડી લીટી **पइलफ** એકજ છે. માટે ∠**पइब** અને ∠**इलड** ના બન્ને હાથોની દિશાઓ એકજ છે. અને એકજ દિશામાં જતી લીટીની વચ્ચેના ખુણા સરખા છે. માટે ∠**पइब** = ∠**इलड** છે.

અથવા. ∠**पइब**, ∠**इलड** ની બરાબર ન હોય તો ∠**पइर**, ∠**इलड** બરાબર કરો. ત્યારે **इर** ‖ **लड** પણ **इब** ‖ **लड** (પ્રતિજ્ઞા) માટે **इर** અને **इब** બન્ને **लड** ‖ છે. પણ એ અશક્ય છે. (પ્લેફેર). માટે ∠**पइब** = ∠**इलड** હોવોજ જોઇએ.

(૩). પક્ષ પ્રમાણે **अबकड** સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

(૧). ∠**अ** + ∠**ड** = ૨ ∟ = ∠**ड** + ∠**क**. ∴∠**अ** = ∠**क** અને તેજ પ્રમાણે ∠**ब** = ∠**ड**.

(૨). ∠**अ** + ∠**ड** = ૨ ∟ = ∠**ड** + ∠**क** = ∠**क** + ∠**ब** = ∠**ब** + ∠**अ**.

(૩). ∠**अ**ને ∠**ड**, ∠**ड**ને ∠**क**, ∠**क**ને ∠**ब**, અને ∠**ब** ને ∠**अ** અરસપરસ દ્વિકાટખુણપૂર્ણી છે.

(૪). अबकड સ. ચ. દોરી अक, बड કર્ણો દોરો. अब || डक અને अक તેને મળે છે માટે ∠बअक = ∠अकड. એજ પ્રમાણે ∠बकअ = ∠डअक; ∠अडब = ∠डबक; અને ∠अबड = ∠बडक.

(૫). પ્રશ્ન ૪ ઉપરથી માલુમ પડે છે કે ∠बअक = ∠अकड, અને ∠बकअ = ∠कअड. ∴ ∠बअड = ∠बकड. અને એજ પ્રમાણે ∠अबक = ∠अडक.

(૬). अबकड સ. ચ. દોરો. अब || डक અને अड, बक તેઓને મળે છે. ∴ ∠अ + ∠ड = ૨ ⌊. અને ∠ब + ∠क = ૨ ⌊. (પ્ર. સિ. ૫.) ∴ ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड = ૪ કાટખુણા

(૭). अबकड સ. ચ. દોરો. ને अक કર્ણ દોરો. હવે પ્રશ્ન ૪ પ્રમાણે ∠बअक = ∠अकड, અને ∠बकअ = ∠कअड. ∴ ∠बअक + ∠बकअ = ∠अकड + ∠कअड. અને પ્રશ્ન ૫ પ્રમાણે ∠ब = ∠ड. ∴ △अबकના ત્રણ ખુણા = △डअकના ત્રણ ખુણા. પણ પ્રશ્ન ૬ પ્રમાણે બન્ને ત્રિકોણોના બધા ખુણા મળી ચાર કાટખુણા બરાબર છે માટે દરેક ત્રિકોણના બધા ખુણા મળી બે કાટખુણા બરાબર છે. એ પ્રમાણે કોઇપણ ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળી બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.

(૮). अबकड એવો સ. ચ. દોરો કે ∠अ = ૧ કાટખુણો હોય. હવે ∠अ = સામેના ∠क (પ્રશ્ન ૫) માટે ∠क = ૧ કાટખુણો. અને ∠अ + ∠ड = ૨ ⌊ (પ્ર. સિ. ૫) અને ∠अ = ૧ ⌊. ∴ ∠ड = ૧ ⌊. તેમજ ∠ब = ૧ ⌊. માટે अबकड લંબચોરસ છે.

(૯). ∠बअक લો. અને बअ || डफ દોરો અને अक || पफर દોરો. डफ, अक ને इમાં છેદે છે. अब || फइड અને अइक તેને મળે છે, ∴ ∠अ = ∠डइक (પ્ર. સિ. ૫). તેમજ ∠डइक = ∠इफर. ∴ ∠अ=∠इफर. વળી ∠पफइ, ∠इफर નો ન્યૂનતા પૂરક છે. માટે ∠पफइ, ∠अ નો પણ ન્યૂનતા પૂરક છે. માટે આપેલા ખુણાની સમાન્તર શાખા લીટીઓ એકજ દિશામાં જતી હોય તો એ શાખા લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા બરાબર છે; અને જો તેઓ વિરૂદ્ધ બાજુએ જતી હોય તો તે ખુણા ન્યૂનતા પૂરક છે.

(૧૦). डइ, अब ને ड માં અને अक ને इ માં છેદે છે. डइ || बक માટે ∠अडइ = ∠अबक; અને ∠अइड = ∠अकब. (પ્ર. સિ. ૫) પણ ∠ब = ∠क. ∴ ∠अडइ = ∠अइड.

(૧૧). પ્રશ્ન ૨ પ્રમાણે ∠इलड નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કરી બતાવો કે ∠लइव ∠इलड નો ન્યૂનતાપૂરક છે.

(૧૨). अबकड લીટી પર अइ, बफ, कर, डल લંબો દોરો. ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड દરેક કાટખુણો છે. માટે એમાંના બબ્બે ખુણાઓ વ્યુત્ક્રમ કે મળતા આવતા હોય તો પણ એ ખુણા કરતા લંબો પ્ર. સિ. ૪ કે ૫ પ્રમાણે સમાન્તર છે.

(૧૩). अब ∥ पफ દોરો.

(૧). बकव ∥ पल એવી દોરો કે એ બન્ને સમાન્તરો વિરુદ્ધ દિશામાં જાય. ∠लपफ ને पक થી દુભાગો અને ∠अबक ને बइ થી દુભાગો. पक, बक ને क માં મળે છે. पल ∥ बक અને पक તેઓને મળે છે; ∴ ∠लपक = ∠पकव. એટલે ∠इकव, ∠लपक થી અર્ધો છે; એટલે ∠अबक થી પણ અર્ધો છે: એટલે ∠इबक બરાબર છે. ∴ बइ દુભાગનારી લીટી ∥ पक દુભાગનારી લીટી.

(૨). बक′ ∥ पल એવી દોરો કે તે એકજ દિશામાં જતી હોય ત્યારે પાસે પાસેના ∠अबक, ∠अबक′ની દુભાગનારી લીટીઓ અરસપરસ લંબ છે. અને ∠अबकની દુભાગનારી લીટી ∥ ∠लपकની દુભાગનારી લીટી (૧) પ્રમાણે. માટે ∠अबक′ ની દુભાગનારી લીટી પણ ⊥ ∠लपफની દુભાગનારી લીટી છે.

(૧૪). इ,ल આગળના ખુણાઓને દુભાગનાર લીટીઓ इवलर ચતુષ્કોણ બનાવે એવી આકૃતિ દોરો. ∠अइल = ∠इलड: અને इव, लर આ ખુણાઓને દુભાગે છે. ∴ ∠वइल = ∠इलर ∴ वइ ∥ लर. તેમજ इर ∥ लव. ∴ इवलर સ. ચ. છે. વળી પાસે પાસેના ∠अइल, ∠वइलने દુભાગનાર લીટીઓ અરસપરસ લંબ છે. માટે इवलर સ. ચ.માં એક ખુણો કાટખુણો છે માટે इवलर લંબચોરસ છે.

(૧૫). अबकड સ. ચ. દોરો. પ્રશ્ન ૧૩ પ્રમાણે ∠अ, ∠डની દુભાગનાર લીટી અરસપરસ લંબ છે: અને ∠अ, ∠कની દુભાગનાર લીટી સમાન્તર છે. એજ પ્રમાણે બાકીના ખુણાઓની દુભાગનાર લીટીઓના સંબંધ પણ છે. માટે ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड ની દુભાગનાર લીટી લંબચોરસ બનાવે છે.

(૧૬). ∠मपर = ∠मपब, ∴ સળ વાળતાં पब, पर ઉપર પડે છે, માટે म બિંદુ જે દુભાગનારી સ્થાયી લીટી પર છે તે એક બીજી પર મળી જતી पब, परથી સમાન અંતરે છે. એજ પ્રમાણે म બિંદુ रप, रड થી પણ સમાન અંતરે છે. પણ બન્ને વખતે म બિંદુનું परથી અંતર (લંબ અંતર) એકજ છે: તેથી पब, पर, रड થી म બિંદુનાં અંતર (લંબ અંતર) સમાન છે.

નોટ-કોઈ લીટીથી કોઈ બિંદુનું અંતર લેવું હોય તો તે બિંદુથી તે લીટી ઉપર પડતા લંબનું જે અંતર છે તે આપેલા બિંદુનું **અંતર** છે.

(૧૭). अब, कड એ લીટીને इफ લીટી प, लમાં છેદે છે અને ∠बपल + ∠पलड < ૨ ⌊ છે. જો अब, कड મળતી ન હોય તો તે अब ∥ कड છે; ∴ એ બે ખુણા = ૨ ⌊ છે. પણ એ અશક્ય છે. વળી पમાંથી ધારો કે कड ∥ मपर દોરી છે ત્યારે ∠रपल + ∠पलड = ૨ ⌊ છે. અને पर, लड લંબાવતાં મળતી નથી; અને ∠बपल + ∠पलड < ૨ ⌊. ∴ ∠रपल > ∠बपल; ∴ पब, परની અંદરથી જાય છે; ∴ पब, लड લંબાવતાં મળવી જોઈએ

(૧૮). જુઓ ઉપસિદ્ધાંત, પ્રમેય ૫મા પરનો.

(૧૯). अबक △માં बक ∥ डअइ છે. ∠डअब = ∠ब અને ∠इअक = ∠क છે. ∴ ∠बअक + ∠ब + ∠क = ∠बअक + ∠डअब + ∠इअक = ૨ ⌊ છે.

(૨૦). સ.ચ.માં એક કર્ણ દોરો. બન્ને ત્રિકોણો સમકોણ છે. માટે પ્ર. સિ. ૬ પ્રમાણે ત્રિકોણના ત્રણે ખુણા મળી બે કાટખુણા બરાબર છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૭ મો.

(૧). अब, कड અને इफ બન્ને સમાન્તરમાંથી कडને સમાન્તર હોય એમ દોરો. अब, कडને સમાન્તર છે, અને इफ, कडને સમાન્તર છે. માટે अब અને इफ બન્ને कडને સમાન્તર છે; માટે अब અને इफ અરસપરસ સમાન્તર છે. (પ્ર. સિ. ૬).

(૨). अब, कड સમાન્તર લીટી દોરો અને अब ⊥ इफ દોરો. इफ ને લંબાવી कडને लમાં મળવા દો. अब ∥ कड; માટે ∠इफब = ∠इलड (પ્ર. સિ. ૫) પણ ∠इफब = ૧ કાટ. માટે ∠इलड પણ કાટખુણો છે. માટે इफल ⊥ कड છે.

(૩). अब અને कड બન્ને અરસપરસ સમાન્તર ન હોય તો તેઓ

ધારો કે લંબાવતાં च બિંદુમાં મળે છે. ત્યારે अबच, અને कडच એ મળતી લીટીઓમાંથી દરેક पलને સમાન્તર છે (પ્રતિજ્ઞા) પણ એ અશક્ય છે. (પ્લેફેર). માટે अब ને कड અરસપરસ સમાન્તર હોવીજ જોઇએ.

(૪). (૧) अब અને कड બન્ને पलની સરખી છે. अब = पल અને कड = पल; ∴ अब = कड. (પ્ર. પ્ર.)

(૨) अब અને कड બન્ને पलને લંબ છે. अब ⊥ कड છે; અને कड ⊥ पल છે. માટે પ્ર. સિ. ૫ના ઉપસિદ્ધાંત પ્રમાણે अब ∥ कड છે; પરંતુ अब ⊥ कड નથી

(૫). अबकड સ. ચ. દોરો. अड સમાન્તર इफ, रल દોરો. इ, र अबમાં છે; અને फ, ल, डकમાં છે. अड ∥ इफ અને अइ ∥ डफ માટે अइफड સ. ચ. છે. એ પ્રમાણે इरलफ, रबकल, अरलड, અને इबकफ સ. ચ. છે. એ પ્રમાણે ગમે તેટલી સમાન્તરો દોરીએ તો પણ પ્રશ્ન ખરો છે.

(૬). अबकड લંબચોરસ દોરો. તેની अब, अड બાજુનાં इ, फ મધ્યબિંદુમાંથી अड ∥ इल, ને अब ∥ फर અનુક્રમે દોરો. अब ∥ फर અને अड ∥ इल; ∴ अइमफ, इबरम, फमलड, અને मरकल દરેક સ. ચ. છે. અને વળી દરેકમાં એકેક ખુણો કાટખુણો છે માટે દરેક લંબચોરસ છે. વળી अबकड ને इल ઉપર અને ફરીથી એ બેવડ વાળેલા લંબચોરસને फमर ઉપર બેવડ વાળીએ તો એ ચાર નાના લંબચોરસો બરાબર એક બીજા સાથે મળી જશે માટે એ સરખા છે.

(૭). કારણ કે अड = अब; તેથી તેઓની અર્ધી બાજુ अफ = अइ માટે अइमफ લંબચોરસ ચોરસ છે. એજ પ્રમાણે બાકીના લંબચોરસ પણ ચોરસ છે.

---

§ ૧૫. ત્રિકોણ અને બહુકોણના ખુણા.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૮ મો.

ઉપસિધ્ધાંત ૧–સિ. ૮ની આકૃતિમાં ∠अकइ + ∠इकड = ∠अ + ∠ब એમ બતાવ્યું છે; એટલે ∠अकड = ∠अ + ∠ब છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુ પણ લંબાવીએ તો બહારનો ખુણો માંહેના સામેના બે ખુણાની બરાબર છે.

વળી બહારનો ખુણો માંહેના સામેના બે ખુણાની બરાબર છે; માટે પ્રત્યક્ષ રીતે બહારનો ખુણો માંહેના સામેના કોઇપણ ખુણાથી મોટો છે.

ઉપસિધ્ધાંત ૨–કોઇ પણ △ના ત્રણ ખુણા = ૨ કાટખુણા (પ્ર. સિ. ૮). માટે બે ત્રિકોણોમાં એકના ૩ ∠ઓ = ૨ કાટખુણા = બીજાના ૩ ∠ઓ છે. અને એમાંના બબ્બે ખુણા બરાબર છે માટે બાકીના ત્રીજા ખુણા પણ બરાબર હોવા જોઇએ (પ્ર. પ્ર.)

ઉપસિધ્ધાંત ૩–△ના ૩ ∠ઓ = ૨ કાટખુણા. માટે △ના બે ખુણાઓ ૨ કાટખુણા કરતાં નાના હોવાજ જોઇએ.

ઉપસિધ્ધાંત ૪–કારણ કે ચતુષ્કોણની એક કર્ણ દોરીએ તો બે △ ઓ થાય છે. અને ચતુષ્કોણના ચારે ખુણા મળી એ બે △ઓના છ ∠ઓ બરાબર છે. અને △ના ૩ ∠ઓ = ૨ ⌊ માટે બે △ઓના છ ∠ઓ = ૪ ⌊. માટે ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાઓ મળી = ૪ કાટખુણા છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫–△ ના ૩ ખૂણા = ૨ ⌊ છે. માટે △ માં જો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બાકીના બે બરાબર એક કાટખૂણો છે; એટલે બાકીના બે કોટિ ખુણા એટલે સાંકડા ખૂણા છે.

△ માં જો એક ખૂણો પહોળો ખૂણો હોય તો બાકીના બે મળી એક કાટખુણાથી ઓછા છે. માટે બાકીનો દરેક સાંકડો ખુણો છે.

△ માં ત્રણે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય તો ઉપસિદ્ધાંત પ્રત્યક્ષ સત્ય છે.

પ્રશ્નો.

(૧). **अबक**·△ માં △ **अइफ** ને **इफ** ઉપર બેવડ વાળી △ **डइफ** ના સ્થિતિમાં મુકો; તેમજ △ **बइल** ને △ **डइल** ની અને △ **कमफ** ને △ **डमफ** ની સ્થિતિમાં મુકો. માટે **अबक** △ નો ∠**अ**, ∠**इडफ** પર છે; ∠**ब**, ∠**इडल** પર છે; અને ∠**क**, ∠**फडम** પર છે. માટે **अबक** △ ના ત્રણે ખુણા **बडक** સીધા ખુણા બરાબર છે; માટે બે કાટખુણા બરાબર છે.

(૨). ∠**क** = ૧ ⌊ હોય એવો **अबक** △ કરો. ∠**अ** + ∠**ब** + ∠**क** = ૨ ⌊ (પ્ર. સિ. ૮). અને ∠**क** = ૧ ⌊ માટે ∠**अ** + ∠**ब** = ૧ ⌊ છે.

(૩). **अबक** △ એવો દોરો કે તેમાં ∠**अ** + ∠**ब** = ∠**क** છે. ∠**अ** + ∠**ब** + ∠**क** = ૨ ⌊ (પ્ર. સિ. ૮). અને ∠**अ** + ∠**ब** = ∠**क** છે. ∴ ∠**क** + ∠**क** = ૨ ⌊. માટે ∠**क** = ૧ ⌊ માટે **अबक** કાટખૂણ ત્રિકોણ છે.

(૪). अबक △ માં ∠क કાટખુણો લો. અને कड, अब ઉપર ⊥ દોરો. ∠अडक = ૧ ⌊. અને ∠अडक + ∠अ + ∠अकड = ૨ ⌊. માટે ∠अ + ∠अकड = ૧ ⌊. અને ∠बकड + ∠अकड = ∠अकब = ૧ ⌊. ∴ ∠अ = ∠बकड. એજ પ્રમાણે ∠अकड = ∠ब. માટે अकड અને बकड △ ઓના ત્રણે ખુણા અનુક્રમે अकब △ ના ત્રણે ખુણા બરાબર છે.

(૫). अबक △ લો. અને डअर, बक ∥ દોરો. डअर ∥ बक અને अब તેઓને મળે છે. ∴ ∠ब = ∠डअब (પ્ર. સિ. ૬). એજ પ્રમાણે ∠क = ∠रअक માટે △ ના ત્રણ ખુણા ∠अ + ∠ब + ∠क= ∠बअक + ∠डअब + ∠रकअ =डअर સીધો ખુણો = ૨ કાટખુણા.

(૬). ∠अकइ = ૧૨૨° = ∠अ + ∠ब; અને ∠अ = ૫૨°. ∴ ∠ब = ૧૨૨° − ૫૨° = ૭૦° છે. ∠अ + ∠ब + ∠अकब = ૨ ⌊ = ૧૮૦°. માટે ∠अकब = ૧૮૦° − ૫૨° − ૭૦° = ૫૮°. અથવા ∠अकब = ૧૮૦° − ૧૨૨° = ૫૮°.

(૭). बअ, कअને અનુક્રમે डब, डक લંબ દોરો; અને कड, इ સુધી લંબાવો. ત્યારે ∠ब + ∠क = ૨ ⌊ (પ્રતિજ્ઞા) અને अबडक ચતુષ્કોણના ચાર ખુણા = ૨⌊. માટે ∠अ + ∠बकड = ૨ ⌊. પણ ∠बडइ + ∠बडक = ૨ ⌊. માટે ∠अ = ∠बडइ છે.

(૮). अबक △ના बक પાયાને ब તરફ ड સુધી અને क તરફ इ સુધી લંબાવો. ત્યારે ∠अबड = ત્રિકોણના ∠अ + ∠क અને ∠अकइ =ત્રિકોણના ∠अ + ∠ब. ∴ ∠अबड + ∠अकइ = ∠अ + ∠क + ∠अ + ∠ब. પણ ∠अ + ∠ब +∠क = ૨ ⌊. ∴ ∠अबड + ∠अकइ = ૨ ⌊ + ∠ अ.

(૯). ∠बडक + ∠डबक + ∠डकब = ૨ ⌊ = ૧૮૦° = ∠अ + ∠अबक + ∠अकब. (∠अ + ∠अबक + ∠अकब) ÷ ૨ = ૯૦°. અને ∠डबक = ∠अबक ÷ ૨; અને ∠डकब = ∠अकब ÷ ૨. માટે બાદબાકી કરીને ∠बडक − ∠अ ÷ ૨ = ૧૮૦° −૯૦°; ∴∠बडक = ૯૦° + ∠अ ÷ ૨ = ૯૦° + ∠अ/૨.

(૧૦). ∠अबक, ∠अकबને પણ દુભાગી દુભાગનારી લીટીઓને इમાં મળવા દો. પ્રશ્ન ૯ પ્રમાણે ∠बइक = ૯૦° + ∠अ/૨ છે. વળી ब આગળના બન્ને ખુણાઓને बइ, बड દુભાગે છે માટે ∠इबड = ૧ કાટ. તેમજ ∠इकड =૧ કાટ. અને इबडक ચતુષ્કોણના ચાર ખુણા = ૪ કાટ. માટે

∠इ + ∠ड = ૨ કાટખુણા. અને ∠इ = ૯૦° + ∠अ/૨. ∴ ∠ड એટલે ∠बडक = ૯૦° − ∠अ/૨.

(૧૧). अब, कड એ ‖ ને पल લીટી प, ल માં છેદે છે. અને ∠बपल ને पइ, અને ∠पलड ને लइ દુભાગે છે. વળી अब ‖ कड અને पल તેને મળે છે. ∴ ∠बपल + ∠पलड = ૨ કાટખુણા. અને पइ, लइ એ ∠ ઓને દુભાગે છે. ∴ ∠इपल + ∠इलप = ૧ કાટ. અને △पइल ના ત્રણ ∠ ઓ = ૨ કાટ. ∴ ∠पइल = ૧ કાટ. ∴ पइ, लइ કાટખુણે મળે છે.

(૧૨). अड = अक તેથી △ अकड ને એવી રીતે બેવડ વાળીએ કે अड, अक ઉપર પડે તો ड, क ઉપર પડશે અને डक સીધી લીટી છે; માટે ∠अडक, ∠अकड ઉપર પડશે. ∴ ∠अडक = ∠अकड, અને ∠अबक = ∠अकब. ∴ ∠अबक + ∠ड = ∠अकड + ∠अकब = ∠बकड. એટલે △ डबक ના બે ખુણા ∠ड + ∠ब = ∠क ∴ ∠क કાટખુણો છે.

(૧૩). अबकड ચતુષ્કોણના ∠अ, ∠ब ને अइ, बइ થી દુભાગો. અને अबकड ચતુષ્કોણના ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड = ૪ કાટ ∴ (∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड) ÷ ૨ = ૨ કાટ. = अबइ △ ના ત્રણ ખુણા = ∠अबइ + ∠बअइ + ∠इ = ∠अबक ÷ ૨ + ∠बअड ÷ ૨ + ∠इ. ∴ ∠इ = ચતુષ્કોણના (∠ड + ∠क) ÷ ૨ છે.

(૧૪). अबक △ ની बक ને ड અને इ સુધી લંબાવો ત્રિકોણના બે ખુણા મળી બે કાટખુણા કરતાં ઓછા છે. માટે △ ના ∠ब + ∠क < ૨ કાટ. અને ∠अबक + ∠अबड + ∠अकब + ∠अकइ = ૪ કાટ. ∴ ∠अबड + ∠अकइ > ૨ કાટ.

(૧૫). अबक △ ના बक પાયા ઉપર △ ની અંદર डबक △ કરો. अबक △ ના ∠अ + ∠अबक + ∠अकब = ૨ કાટ. અને डबक △ ના ∠ड + ∠डबक + ∠डकब = ૨ કાટ. માટે ∠अ + ∠अबक + ∠अकब = ∠ड + ∠डबक + ∠डकब. પણ ∠अबक > ∠डबक અને ∠अकब > ∠डकब છે. માટે ∠अ < ∠ड હોવોજ જોઇએ.

(૧૬). પ્રશ્ન ૯ ની સિદ્ધતા ઉપર આપી છે તે જુઓ. ૯મા પ્રશ્નમાં ∠ब, ∠कને દુભાગ્યા છે તેને બદલે અહીં ∠अ, ∠बને દુભાગ્યા છે. પ્રશ્ન ૯ પ્રમાણે अडब = ૯૦° + ∠अ / ૨ ∴ ∠अडब > ૧ કાટખુણો.

(૧૭). ड આગળનો બહારનો ખુણો = ∠डअक + ∠डकअ=∠बकअ + ∠बअक = ब આગળનો ખુણો (પ્ર. સિ. ૮. ઉપ. ૧). માટે ड આગળનો બહારનો ખુણો = ब આગળનો બહારનો ખુણો (અને તેથી વળી ∠अबक = ∠अडक, ∵ આ ખુણાઓ બહારના તેઓની પાસેના સરખા ખુણાના ન્યૂનતાપૂરક છે.)

(૧૮). પ્રશ્ન ૧૪ ઉપર જુઓ.

(૧૯). ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા = ૨ કાટ. = ૧૮૦° અને એ ત્રણે ખુણા અરસપરસ બરાબર હોય તો દરેક ખુણો = ૧૮૦° ÷ ૩ = ૬૦° = $\frac{૨}{૩}$ કાટખુણો છે.

(૨૦). ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા = ૧૮૦°. અને ત્રીજો જે ૩૦° વધારે છે, તે ૧૮૦° માંથી બાદ કરીએ તો ૧૫૦° ÷ ૩ = ૫૦° = પહેલો અથવા બીજો ખુણો. માટે ત્રીજો ખુણો = ૫૦° + ૩૦° = ૮૦° છે.

(૨૧). ब,क આગળના ચારે ખુણા = ૪ કાટખુણા. અને ચતુષ્કોણના ચારે ખુણા = ૪ કાટખુણા. અને બન્ને જોડમાં ∠अबक, ∠डकब સામાન્ય છે. તે લઇ લેતાં બાકીના ब,क આગળના બહારના ખુણા = ∠अ+∠ड છે.

(૨૨). પંચકોણની બે કર્ણ દોરતાં ત્રણ ત્રિકોણ થાય છે. અને એ પંચકોણના ખુણા = એ ત્રણ △ ઓના ∠ ઓ = ૬ કાટખુણા.

(૨૩). નિયમિત બહુકોણાકૃતિમાં બધા ખુણા સરખા છે.

(૧). ષટ્કોણમાં બધા ખુણા = ૮ કાટ. × ૯૦ = ૭૨૦° ∴ ષટ્કોણનો દરેક ખુણો = ૭૨૦° ÷ ૬ = ૧૨૦° છે.

(૨). અષ્ટકોણમાં બધા ખુણા = ૧૨ કાટ. = ૧૨ × ૯૦° = ૧૦૮૦°. ∴ અષ્ટકોણનો દરેક ખુણો = ૧૦૮૦° ÷ ૮ = ૧૩૫°.

નોટ ષટ્કોણના ૪ ત્રિકોણ અને અષ્ટકોણના ૬ ત્રિકોણ થાય છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૯ મો.

(૧). ચાર બહારના ખુણા = ૪ કાટ. = ૩૬૦°. માટે ચોથો બહારનો ખુણો = ૩૬૦° − ૭૨° − ૧૧૨° − ૫૫° = ૧૨૧° છે. વળી ૭૨°ની પાસેનો અંદરનો ખુણો = ૧૮૦° − ૭૨° = ૧૦૮°; ૧૧૨°ની પાસેનો અંદરનો ખુણો = ૧૮૦° − ૧૧૨° = ૬૮°, અને ૫૫°ની પાસેનો અંદરનો ખુણો = ૧૮૦° − ૫૫° = ૧૨૫° છે.

(૨). ત્રણ બહારના ખુણા મળી ૬૭° + ૨૫° + ૩૮° = ૧૩૦° છે અને પાંચ બહારના = ૩૬૦ અને બાકીના બહારના સરખા છે. માટે આ દરેક બહારનો = (૩૬૦° – ૧૩૦°) ÷ ૨ = ૨૩૦° ÷ ૨ = ૧ ૫° છે અને એ પાંચ બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા અનુક્રમે ૧૮૦ માંથી દરેક બાદ કરવાથી આવે છે. માટે અંદરના ખુણાઓ ૧૧૩°, ૧૫૫°, ૧૪૨°, ૬૫° અને ૬૫° છે.

(૩). બહુકોણની બાજુઓની સંખ્યા **અ** છે. માટે તેના ખુણાની સંખ્યા પણ **અ** છે. અને બહુકોણના બધા ખુણા + ૪ કાટ. = ૨ × **અ** કાટખુણા છે માટે બહુકોણના બધા ખુણા = (૨ × **અ** – ૪) કાટખુણા છે.

(૪). પ્રશ્ન ૩ પ્રમાણે બધા ખુણા = (૨ **અ** – ૪) કાટખુણા અને સમકોણના બધા ખુણા સરખા છે અને તેઓની સંખ્યા **અ** છે. માટે દરેક ખુણો = (૨ **અ** – ૪) ÷ **અ** કાટખુણા છે.

(૫). જો શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો ૧ હોય તો પાયા ઉપરના ખુણા અનુક્રમે ૩ અને ૫ છે. એટલે ત્રણે ખુણા મળી ૧ + ૩ + ૫ = ૯ છે પણ એ ત્રણે ખુણા = ૧૮૦°. માટે શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો = ૧૮૦° ÷ ૯ = ૨૦° અને પાયા ઉપરના ખુણા ૨૦ × ૩ = ૬૦° અને ૨૦×૫=૧૦૦° છે.

(૬) **અ** બાજુની સંખ્યા હોય એવો બહુકોણ દોરો અને એકજ શિરોબિંદુથી સામેનાં શિરોબિંદુ સુધી કર્ણો દોરો એકંદરે (અ – ૨) ત્રિકોણની સંખ્યા થશે. અને એ ત્રિકોણોના બધા ખુણા = બહુકોણના બધા ખુણા અને દરેક △ના ત્રણ ખુણા = ૨ ⌊ છે. માટે બધા △ઓના ∠ઓ = (અ–૨) × ૨ કાટખુણા છે. માટે બહુકોણના બધા ખુણા = ૨ (અ – ૨) કાટખુણા છે. માટે બહુકોણના બધા ખુણા + ૪ કાટખુણા=૨ **અ** કાટખુણા છે.

(૭) △ના ત્રણ ખુણા = ૧૮૦°. ∴ પાયાની સામેનો ખુણો = ૧૮૦° – ૬૫° –૮૩° = ૩૨° છે. માટે આ ખુણાની દુભાગનારી લીટી પાયા સાથે જે ખુણા કરે છે તે ૬૫° + ૧૬° = ૮૧° અને ૮૨° + ૧૬° = ૯૮° છે.

(૮). પાયા ઉપરના ખૂણાઓ ૬૫° અને ૮૩° છે. માટે તેનાથી અર્ધા ખુણા (૬૫° + ૮૩°) ÷ ૨ = ૭૪° છે. માટે દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો ૧૮૦° – ૭૪° = ૧૦૬° છે

(૯). ચતુષ્કોણના ચારે ખુણા મળી ૩૬૦° છે અને ચોથો ખુણો ૧° હોય તો પહેલો ૫°, બીજો ૪° અને ત્રીજો ૮° છે. માટે એકંદર ૧° + ૫° + ૪° + ૮° = ૧૮° છે. માટે ચોથો ખુણો ૩૬૦° ÷ ૧૮ = ૨૦° છે. માટે પહેલો ૧૦૦°, બીજો ૮૦° અને ત્રીજો ૧૬૦° છે.

(૧૦). સમબહુકોણના બધા ખુણા સરખા છે. અને **અ** બાજુની સંખ્યા હોય તો દરેક ખુણો (૨ **અ** − ૪) ÷ **અ** કાટખુણા છે.

(૧). $\therefore \dfrac{\text{૨ અ − ૪ કાટ.}}{\text{અ}} = \text{૧૦૮} = \dfrac{\text{૨ અ − ૪}}{\text{અ}} \times \text{૯૦}.$

$\therefore \frac{\text{૧૦૮}}{\text{૯૦}}$ **અ** = ૨ **અ** − ૪;

$\therefore \frac{\text{૬}}{\text{૫}}$ **અ** = ૨ **અ** − ૪,

∴ ૬ **અ** = ૧૦ **અ** − ૨૦,

∴ ૪ **અ** = ૨૦, ∴ **અ** = ૫.

∴ (૧) માં બાજુની સંખ્યા ૫ છે.

(૨). એજ પ્રમાણે $\text{૧૭૦} = \dfrac{\text{૨ અ − ૪}}{\text{અ}} \times \text{૯૦}.$

$\therefore \dfrac{\text{૧૭ અ}}{\text{૯}} = \text{૨ અ − ૪}, \quad \therefore \text{૧૭ અ = ૧૮ અ − ૩૬}$

∴ **અ** = ૩૬.

∴ (૨) માં બાજુની સંખ્યા ૩૬ છે.

(૩). ૧૭૯ **અ** = ૧૮૦ **અ** − ૩૬૦

∴ **અ** = ૩૬૦.

∴ (૩) માં બાજુની સંખ્યા ૩૬૦ છે.

(૪). ૧૭૭$\frac{\text{૧}}{\text{૨}}$ × **અ** = ૧૮૦ **અ** − ૩૬૦.

∴ ૧$\frac{\text{૧}}{\text{૨}}$ **અ** = ૩૬૦, ∴ **અ** = ૨૪૦ છે.

∴ (૪) માં બાજુની સંખ્યા ૨૪૦ છે.

(૧૧). ઓછામાં ઓછી બાજુવાળો સમકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ છે. અને તેનો દરેક ખુણો ૧૮૦° ÷ ૩ = ૬૦° છે.

(૧૨). કોઇ પણ સમ બહુકોણમાં બધા બહારના ખુણા મળી ૩૬૦° છે. માટે (૧) માં ૩૬૦° ÷ ૩૦ = ૧૨ બાજુ છે; (૨) માં ૩૬૦° ÷ ૧૨ = ૩૦ બાજુ છે; (૩) માં ૩૬૦° ÷ ૪૦ = ૯ બાજુ છે; (૪) માં ૩૬૦° ÷ ૯ = ૪૦ બાજુ છે; (૫) માં ૩૬૦° ÷ ૧૫ = ૨૪ બાજુ છે: એ પ્રમાણે (૬) માં ૧૦, (૭) માં ૪, (૮) માં ૧૫, (૯) માં ૯૦, અને (૧૦) માં ૩૬ બાજુ છે.

(૧૩). (અ). બહારનો દરેક ખુણો ૩૬૦° ÷ ૧૨ = ૩૦°, ૩૬૦° ÷ ૧૦ = ૩૬°, ૩૬૦° ÷ ૫ = ૭૨°, અને ૩૬૦° ÷ ૩ = ૧૨૦° છે

(બ). અંદરનો દરેક ખુણો ઉપલા ખુણાનો ન્યૂનતા પૂરક છે. માટે અંદરના ખુણા અનુક્રમે ૧૫૦°, ૧૪૪°, ૧૦૮°, અને ૬૦° છે.

(૧૪). સમબહુકોણના બહારના ખુણા બધા સરખા હોવા જોઇએ. અને બધા બહારના ખુણા । સરવાળો ૩૬૦° છે. માટે દરેક બહારનો ખૂણો ૩૬૦° નો પૂર્ણાંક અવયવ હોવો જોઇએ. પણ ૭, ૧૧, ૧૩, ૨૧ અને ૩૩ એ ૩૬૦ ના અવયવો નથી; માટે એ બહારના ખુણા હોય એવા સમબહુકોણ બની શકે નહિ. પણ ૩૬૦ નો અવયવ ૧૫ છે માટે ૧૫° બહારનો ખુણો હોય એવો સમબહુકોણ બની શકે છે. અને તેની બાજુની સંખ્યા ૩૬૦ ÷ ૧૫ = ૨૪ છે.

(૧૫). બહારનો ખુણો પહોળો ખુણો હોય તો ૯૦° થી મોટો હોવો જોઇએ. માટે $\frac{\text{૨ અ} - \text{૪}}{\text{અ}} \times \text{૯૦}$ એક ૯૦° થી નાનો હોવો જોઇએ અને ૨ અ − ૪ એ અ થી નાની હોવી જોઇએ. એટલે ૨ અ − અ એ ૪થી નાની હોવી જોઇએ. માટે અ એ ૪થી નાની હોવી જોઇએ. અને એવા સમબહુકોણની ૩ બાજુ છે.

(૧૬). પ્રશ્ન ૧૩ પ્રમાણે અંદરના અને બહારના ખુણાનાં માપ નીકળે છે. દરેક બહારનો ખુણો ૩૬૦ ÷ બાજુની સંખ્યા. અને દરેક અંદરનો ખુણો ૧૮૦ − આ બહારનો ખુણો છે.

બાજુની સંખ્યા.	૩	૪	૫	૬	૮	૧૦	૧૨	૧૫
બહારનો ખુણો અંશમાં	૧૨૦	૯૦	૭૨	૬૦	૪૫	૩૬	૩૦	૨૪
અંદરનો ખુણો અંશમાં	૬૦	૯૦	૧૦૮	૧૨૦	૧૩૫	૧૪૪	૧૫૦	૧૫૬

(૧૭). પ્રશ્ન ૧૬ પરથી માલમ પડે છે કે સમષટ્કોણમાં દરેક ખુણો ૧૨૦° નો છે. अब = ૨″ લો. ∠बअफ અને ∠अबक દરેક ૧૨૦° નો બનાવો. बक = ૨″ = अफ બનાવો. ∠अफइ અને ∠बकड દરેક ૧૨૦° નો બનાવો. फइ અને कड દરેક ૨″ ની કાપો. इड સાંધો. अबकडइफ માગેલો સમષટ્કોણ છે.

(૧૮). પ્રશ્ન ૧૭ પ્રમાણેજ ૨″ ને બદલે ૪.૨ સે.મી. લઇ બનાવો.

(૧૯). સમદ્વાદશકોણુમાં દરેક ખુણો ૧૫૦° છે (પ્રશ્ન ૧૬) માટે પ્રશ્ન ૧૭ પ્રમાણે એક अ ब બાજુ = ૧.૪" ની લઇ દરેક ખુણો ૧૫૦° નો અને દરેક બાજુ ૧.૪" ની લઇ સમદ્વાદશકોણ બનાવો.

(૨૦). પ્રશ્ન ૧૭મામાં अइ, इक, कअ સાંધો. બાજુ માપો. બાજુ સરખી છે માટે એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને તેનો દરેક ખુણો ૬૦°નો છે.

(૨૧). ત્રણ બહારના ખુણા મળી ૩૬૦° છે. ∴ એક બહારનો ખુણો ૧૨૦° છે. તેથી તેની પાસેનો અંદરનો ખુણો ૬૦° છે.

---

§ ૧૬. એકરૂપ ત્રિકોણો ને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૦ મો.

(૧). આપેલા પક્ષ પ્રમાણેના બે △ ઓ કાપી એકને બીજા ઉપર મુકી બતાવો કે બન્ને બરાબર મળી જાય છે.

(૨). ∠क = ∠फ, ∠ब = ∠इ અને बक = इफ થાય છે.

(૩). बअ = इड, बक = इफ અને ∠ब = ∠इ લઇ પ્ર० સિ૦ ૧૦ પ્રમાણેનીજ રીત વાપરો.

(૪). अब = डइ, बक = डफ અને ∠ब = ∠इના બે △ઓ લો. अबक △ ને ઉંચકીને डइफ △ ઉપર એવી રીતે મુકો ब,इ ઉપર પડે અને बअ, इड ઉપર અને बक, इफ ઉપર પડે. હવે अक, डफ ઉપર પડે અથવા इफ માં ल સુધી જઇ डल ઉપર પણ પડે. આવી સ્થિતિમાં अबक △ ≡ डइफ △ થાય કે ન પણ થાય. પણ ∠ब = ∠इ = ૧ ⌊ હોય કે પહોળો ખૂણો હોય તો अक, જરૂર डफ ઉપર પડશે અને એ વખતે △ ઓ સર્વસમાન છે.

(૫). अबक △ માં अड મધ્યગા એવી લો કે अड⊥बक હોય. હવે अडब △ અને अडक △ માં बड = कड, ∠अडब = ૧ ⌊ = ∠अडक, અને अड સામાન્ય (એટલે બરાબર) છે. ∴ अडब △ ≡ अडक △ ∴ ∠ब = ∠क, ∴ अबक △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૬) अक, बड કર્ણો કાટખુણે मમાં દુભાગે એવો अबकड ચતુષ્કોણ દોરો. अमब, बमक, कमड અને डमअ △ ઓમાં બબ્બે બાજુ (કર્ણોના

સમાન ભાગો) અને અંતર્ખુણા બરાબર છે માટે △ ઓ બરાબર છે માટે अब = बक = कड = डअ છે માટે બધી બાજુ સરખી હોય એવો ચતુષ્કોણ રૉમ્બસ કે ચોરસ હોવો જોઇએ.

(૭). कडમાં इ બિંદુ લો, इअ, इब સાંધો. હવે इकअ △ અને इकब △માં अक = बक, कइ સામાન્ય છે અને ∠इकअ = ૧ ⌊ = ∠इकब ∴ △ इकअ ≡ △इकब ∴ इअ = इब; એ પ્રમાણે कडનું દરેક બિંદુ अ, बथी સમાન અંતરે છે.

(૮) अमक △ અને डमब △ માં मक = मड, मअ = मब અને ∠अमक = સામેના ∠डमब ∴ △अमक ≡ △डमब.

(૯). अबक △માં अक = बक, અને कड, अकब ખુણાને દુભાગી अब પાયાને डમાં મળે છે. હવે △ अडक અને △ बडक માં अक = बक, डक સામાન્ય છે અને ∠अकड = ∠बकड ∴ △अडक ≡ △ बडक. ∴ ड આગળના બન્ને ખુણા સરખા છે માટે એ દરેક ખુણો કાટખુણો છે. ∴ कड ⊥ अब.

(૧૦). अडक △ અને अइब △ માં अक = अब, अड = अइ અને ∠अ સામાન્ય છે. માટે △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ कड = बइ છે.

(૧૧). ૧. अडफ △ અને अबम △ માં अड = अब, डफ = बम (∵ બન્ને ચોરસની સરખી બાજુથી અર્ધી છે) અને ∠ड = ૧ ⌊ = ∠ब ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે ∴ अफ = अम.

૨. बकफ △ અને डमक △ લઇ (૧) પ્રમાણે સિદ્ધ કરો. बक = कड, कफ = कम અને ∠क સામાન્ય છે. ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે ∴ बफ = डम.

૩. लबम △ અને फकम △ માં लब = कफ અને मब = मक અને ∠ब = ૧ ⌊ = ∠क ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ लम = मफ.

૪. (૧) પ્રમાણે △ अबम અને △ डकम લઇ સિદ્ધ કરો.

(૧૨). △अबम અને △डइलમાં अब = डइ, बम = $\frac{1}{2}$ बक = $\frac{1}{2}$ इफ = इल અને ∠ब = ∠इ, ∴ △ઓ સર્વ સમાન છે ∴ अम = डल અને ∠अमब = ∠डलइ છે.

(૧૩). मअ, मब સાંધો. अमड △ અને बमक △માં अड = बक અને मड = मक અને ∠ड = ∠क, ∴ △ ઓ સર્વ સમાન છે. ∴ अम = बम છે.

(૧૪). अबक △માં अब = अक અને बअ, कअને इ, इ સુધી લંબાવી अड = अइ છે. डक, इब સાંધો ત્યારે △ अडक ≡ △अइब થશે. ∵ એ △ઓમાં अक = अब, अड = अइ અને ∠कअड = સામેના ∠बअइ, ∴ △ઓ સર્વ સમાન છે.

(૧૫). कडइ △ અને बइअ △માં डक = इब, डइ = डअ અને ∠कडइ = સામેના ∠बडअ, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે.

એજ પ્રમાણે बडइ △ અને कडअ △ માં बड = कड, डइ = डअ, અને ∠बडइ = સામેના ∠अडक, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે.

(૧૬). પ્રશ્ન ૮ પ્રમાણે △अमक ≡ △बमड; ∴ ∠मअक = ∠मबड; પણ આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે. ∴ अक ‖ बड. અને એજ પ્રમાણે अड ‖ बक

(૧૭). પ્રશ્ન ૬ ઠ્ઠો ઉપર જુઓ.

(૧૮). अक, बड, अड સાંધો. अब ‖ कड, ∴ ∠बअड = ∠कडअ. વળી △अबड અને △डकअ માં अड સામાન્ય છે, अब = कड, અને ∠बअड = ∠अडक, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बड = अक. અને ∠बडअ = ∠कअड; અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે. ∴ अक ‖ बड, ∴ अक = અને ‖ बड છે.

(૧૯). સમબાજુ △ ના બધા ખુણા સરખા છે. માટે દરેક ⅔ કાટખૂણો છે. ∴ ∠ बअह = ∠ कअड. બન્નેમાં ∠ बअक ઉમેરો. ∴ ∠कअह = ∠बअड. हक बड સાંધો. હવે हअक △ અને डअब △ માં हअ = अब, अक = अड, અને અંતર્ખુણો हअक = અંતર્ખુણો डअब, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ कह = बड.

(૨૦). अक, बड સાંધો. △ अबक અને △ बकड માં अब = कड, बक સામાન્ય છે અને ∠अबक = ∠बकड ∵ સમપંચકોણના બધા ખુણા સરખા છે; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अक = बड. એજ પ્રમાણે बड = कइ = डअ = इब = अक સિદ્ધ કરો.

(૨૧). પ્રશ્ન ૨૦ ની સિદ્ધતાની રીત વાપરીને સિદ્ધ કરો કે अइ = अक = कइ; અને बफ - बड = डफ. માટે △ अकइ અને △ बफड સમબાજુ છે.

(૨૨). अक, बड લીટી म માં દુભાગે છે. अमड △ ≡ बमक△ ∴ ∠अडम = ∠मबक; અને ∠मअड = ∠मकब. ∴ अब ‖ डक અને अड ‖ बक છે.

(૨૩). अबकड ચતુષ્કોણમાં अड = बक, बअ = कड, અને ∠ब = ∠ड. ∴ △ अडक ≡ △ अबक. ∴ अब ∥ डक અને अड ∥ बक છે.

(૨૪). ચોરસની બધી બાજુઓ સરખી છે. માટે કોઇ પણ કર્ણની આસપાસના બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(૨૫). ∠ इअब = ૧ ⌊ = ∠ रअक. અને ∠ बअक સામાન્ય છે માટે ∠ इअक = ∠ रअब. ∴ △ इअक ≡ △ इअब. ∴ इक = रब.

(૨૬). ∠ लअम = ૧ ⌊ = ∠ डअब. ∴ ∠ लअड = ∠ बअम. ∴ △ लअड ≡ △ अमब છે. ∴ लड = मब છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૧ મો.

(૧). આપેલા પક્ષ પ્રમાણેના બે ત્રિકોણો કાપી એકને બીજા પર મુકી સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨). આપેલા બે ત્રિકોણોમાં अब બાજુ क ખૂણાની સામેની છે. પણ इफ, ∠डની સામેની છે. અને ∠क = ∠ड નથી. માટે अब, इक એ **મળતી આવતી** બાજુઓ નથી. માટે △ ઓ સરખા હોય કે ન હોય.

(૩). अड, ∠ अ ને દુભાગી बक પાયાને ड માં મળે છે. ∵ △ अबड અને △ अकड માં ∠ब = ∠क, અને ∠बअड = ∠कअड, અને अड મળતી આવતી બાજુ સામાન્ય છે. ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बड = कड.

(૪). अबक △માં ∠अને દુભાગી अड बक પાયાને કાટખૂણે ड માં મળવા દો. ∵ △ अबड અને △ अकड માં ∠बअड = ∠कअड, ∠बडअ = ૧ ⌊ = ∠कडअ અને મળતી આવતી બાજુ अड સામાન્ય છે, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अब = अक; ∴ अबक △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૫). अबक △ ≡ डइफ △ ∴ अब = डइ, ને ∠ब = ∠इ. હવે अबप △ અને डइल △માં अब = डइ, ∠ब = ∠इ અને ∠बअप = $\frac{1}{2}$ ∠बअक = $\frac{1}{2}$ ∠इडफ = ∠इडल, ∴ अबप △ ≡ डइल △; ∴ अप = डल.

(૬). ∠बअकને अड થી દુભાગી अडમાં ड બિંદુ લો. अब ઉપર डब લંબ, અને अक ઉપર डक લંબ, દોરો હવે अबड △ અને अकड △

માં ∠ब = ∠क (કારણ કે દરેક કાટખુણો છે), ∠बअड = ∠कअड, અને अड સામાન્ય છે, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ डब = डक. અને એજ પ્રમાણે अडનું કોઈ પણ બિંદુ अब, अक થી સમાન અંતરે છે.

(૭). अबकड સ. ચ. દોરી अक સાંધો ∵ अब ‖ डक, ∴ ∠बअक = ∠अकड; અને ∵ अड ‖ बक, ∴ ∠डअक = ∠अकब. હવે अबक △ અને डकअ △માં ∠बअक = ∠अकड, ∠अकब = ∠डअक, અને अक સામાન્ય છે, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अब = डक, ને अड = बक.

(૮). अब લીટીના क મધ્યબિંદુમાંથી डकइ કોઇ પણ લીટી દોરો; અને તેના ઉપર अड, बइ લંબ દોરો. હવે अडक △ અને बइक △માં अक = बक, ∠ब = ૧ ⌊ = ∠इ, અને ∠अकड = સામેના ∠बकइ, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अड = बइ.

(૯). अबक △માં ∠अને દુભાગનારી अडની સામેનો ∠ब = ∠क. ∵ अबड △ અને अकड △માં ∠बअड = ∠कअड, ∠ब = ∠क અને अड સામાન્ય છે. ∴ △ઓ સર્વ સમાન છે. ∴ अब = अक છે. ∴ अबक △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૧૦). अक, बड અરસપરસ મમાં છેદે છે. હવે अकड △ અને अकब △માં ∠बअक = ∠डअक, ∠बकअ = ∠डकअ, અને अक સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अब = अड, અને कब = कड. વળી डकम △ અને बकम △માં डक = बक, कम સામાન્ય છે અને ∠डकम = ∠बकम, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠कमड = ∠कमब અને પાસેપાસેના ખુણા સરખા હોય તો દરેક કાટખુણો છે. માટે अक ⊥ बड છે.

(૧૧). अक, डब ‖ લીટીની વચ્ચે अबના મધ્યબિંદુ મમાંથી मक, अक ⊥ દોરો. अक ‖ डब, માટે कम લંબાવતાં તે डब ને डમાં કાટખુણે મળે છે. (પ્ર૦ સિ૦ ૫). હવે कअम △ અને बडम △ માં ∠क = ૧ ⌊ = ∠ड, ∠अ = વ્યુત્ક્રમ ∠ब અને अम = बम, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે માટે कम = डम માટે अबનું મધ્યબિંદુ म બન્ને સમાન્તરોથી સમાન અંતરે છે.

(૧૨). म મધ્યબિંદુમાંથી अक ને लમાં અને बड ને पમાં મળે તેમ लमप લીટી દોરો. હવે लकम △ અને पडम △ માં ∠क = ૧ ⌊ = ∠ड, ∠ल = વ્યુત્ક્રમ ∠प અને मक = मड (પ્રશ્ન ૧) ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ मल = मप.

(૧૩). अमब, लमप એ કોઇ પણ લીટી દોરી છે. પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે अक = बड, અને પ્રશ્ન ૧૨ પ્રમાણે कल = डप, ∴ अल = बप.

(૧૪). આકૃતિ કહ્યા પ્રમાણે દોરી अकब, डकइ △ પુરા કરો. अकब, डकइ △ આમાં अक = डक, ∠अ = ૧ ∟ = ∠ड અને ∠अकब = ∠डकइ, ∴ △ આ સર્વસમાન છે. ∴ डइ = अब અને अब નદીની પહોળાઇ છે, ∴ નદી डइ જેટલી પહોળી હોવી જોઇએ.

(૧૫). अबक △માં अब = अक, અને बइ ⊥ अक અને कफ ⊥ अब છે. હવે अफक △ અને अइब △ માં ∠अ સામાન્ય છે, ∠फ = ૧ ∟ = ∠इ, અને अक = अब, ∴ △ આ સર્વસમાન છે. ∴ कफ = बइ છે.

(૧૬). अक, बड અરસપરસ ममां મળે છે. હવે अमइ △ અને कमफ △માં अइ = कफ, ∠इ = ૧ ∟ = ∠फ અને ∠अमइ = ∠कमफ, ∴ △આ સર્વસમાન છે, ∴ अम = कम છે.

(૧૭). फलह △ અને फकग △માં ∠फ સામાન્ય છે, ∠ह = ૧ ∟ = ∠ग અને फह = फग, ∴ △આ સર્વસમાન છે. ∴ फल = फक. પણ फग = फह, ∴ फल − फग = फक − फह, ∴ गल = हक છે.

(૧૮). अबक કોઇ પણ △ લો. अब ને फ સુધી અને अक ને इ સુધી લંબાવો. ∠कबफने 'अ' થી અને ∠बकइने कअ' થી દુભાગો. ત્યારે अ', अबक △ની ત્રણે બાજુથી સમાન અંતરે થશે. अ'फ, अ'ड, अ'इ ત્રણે બાજુ પર ⊥ દોરો. હવે अ'फब અને अ'डब △આમાં ∠फ = ૧ ∟ = ∠ड અને ∠अ'बफ = ∠अ'डब અને अ'ब સામાન્ય છે, ∴ अ'फ = = अ'ड. એજ પ્રમાણે अ'ड = अ'इ. ∴ अ'फ = अ'ड = अ'इ

એજ પ્રમાણે बअ, बक લંબાવતાં બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટી ब'માં મળે તો ब' પણ એવું એક બિંદુ છે. અને એજ પ્રમાણે कअ, कब લંબાવતાં બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટી क'માં મળે તો क' પણ એવું એક બિંદુ છે.

વળી એજ પ્રમાણે अबक △ના ∠ब, ∠कને દુભાગનારી લીટીઓ ममां મળે તો म પણ अबक △ની બાજુથી સમાન અંતરે છે. રચના અને સિદ્ધતા બધામાંજ સરખી રીતે થાય છે.

નોટ—म બિંદુ △ના **અંતર્લગ્ન વર્તુળ**નું મધ્યબિંદુ છે; અને अ', ब', क', બિંદુઓ △ના **ઉપલગ્ન વર્તુળ**નાં મધ્યબિંદુ છે.

(૧૯). પ્રમેય ૧૧ ની આકૃતિમાં बम ⊥ अक, અને इर ⊥ डफ છે. ∴ बमक △ ≡ इरफ △ છે. बम = इर છે.

(૨૦). अड, बइ લંબ હોય તો अबड △ ≡ अबइ △ છે. ∴ अड = बइ છે.

(૨૧) બે આપેલી લીટીઓ ન મળતી હોય તો લંબાવીને મળવા દો. તેના અંતર્ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓ જો પહેલી આપેલી લીટીને म, र માં મળે તો म, र એ માગેલાં બિંદુ છે.

(૨૨) એક કર્ણ દોરી તેની આસપાસના ત્રિકોણો પ્રમેય ૧૧ પ્રમાણે સર્વસમાન બતાવો.

(૨૩). अमड △ ≡ बमइ △. ∴ अड = बइ ને मड = मइ છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૨ મો.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—૫. સિ ૧૨ ની આકૃતિમાં अफ, ∠बअकને દુભાગે છે. અને △ अबफ ≡ △ अकफ બતાવ્યું છે. ∴ ∠बफअ = ∠कफअ. ∴ એ દરેક કાટખુણો છે. અને વળી बफ = कफ પણ છે.

(૧). अकफ △ ને अफ ની ઉપર બેવડ વાળી अबफ △ ઉપર પડવા દો. ∵ ∠कअफ = ∠बअफ, ∴ अक, अब ઉપર બરાબર પડશે. અને ∵ कफब સીધી લીટી છે અને फ બિંદુ સ્થિર રહે છે અને क, ब ઉપર પડે છે, ∴ फक, फब ઉપરજ પડશે. ∴ ∠क, ∠ब ઉપરજ પડશે. ∴ ∠क = ∠ब છે. તેથી अकब △ अक ની આસપાસ સમ્મિતરૂપ છે.

(૨). अबक સમબાજુ △ માં अड, बक ની મધ્યગા દોરો. △ अबड ને अड ઉપર બેવડ વાળી △ अकड ઉપર પડવા દો. ∵ डब = डक છે, ∴ ब, क ઉપર પડે છે. અને ∵ ∠ब = ∠क (ઉ. ૨) અને बअ = कअ, ∴ अबड △, अकड △ ઉપર બરાબર પડે છે. માટે अबक △ अड ની આસપાસ સમ્મિતરૂપ છે.

(૩). (૧). ∠अबक + ∠डबक = ૧૮૦°; અને ∠अबक = ૭૨°,
તેથી ∠डबक = ૧૮૦° − ૭૨° = ૧૦૮°.

(૨). ∠अकब + ∠इकब = ૧૮૦°; અને ∠अकब = ૬૭°,
તેથી ∠इकब = ૧૮૦° − ૬૭° = ૧૧૩°.

(૪). ∠अ + ∠ब + ∠क = ૧૮૦°, અને ∠अ = ૩૨°, ∴ ∠ब + ∠क = ૧૮૦° − ૩૨° = ૧૪૮°; પણ ∠ब = ∠क, ∴ ∠ब = ∠क = ૧૪૮° ÷ ૨ = ૭૪°.

(૫). (૧). △ अबल, અને △ अकड માં अब = अक, अल (= अक + कल) = अड (= अब + बड = अक + कल) અને ∠अ સામાન્ય છે, ∴ △ अबल ≡ △ अकड (પ્ર૦ સિ૦ ૧૦).

(૨). △ डबक, અને △ लकब માં डब = लब, અને बक સામાન્ય છે, અને ∠डबक = ∠लकब (ઉ૦ ૧) ∴ △ डबक ≡ △ लकब (પ્ર૦ સિ૦ ૧૦). વળી (૧) ઉપરથી ∠अबल = ∠अकड; અને (૨) ઉપરથી ∠लबक = ∠डकब. ∴ બાદબાકી કરીને ∠अबल − ∠लबक = ∠अकड − ∠डकब; ∴ ∠अबक = ∠अकब.

નોટ—આ સિદ્ધતા યૂક્લિડના સિ૦ ૧૨ ની સિદ્ધતા છે

(૬). (૧). अबक △ ના ∠ब = ∠क; અને △ डबक ના ∠ब = ∠क. ∴ આખો ∠अबड = આખો ∠अकड.

(૨). अड સાંધો. હવે अबड △ અને अकड △ માં अब = अक, डब = डक, અને અંતર્ખુણો अबड = અંતર્ખુણો अकड, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠बअड = ∠कअड અને ∠बडअ = कडअ છે.

(૭). જુઓ ઉ. ૩ની સિદ્ધતા.

(૮). अबक △ ની અંદર लबक △ છે એવી આકૃતિ દોરો. હવે अबक △ના ∠ब = ∠क અને लबक △ ના ∠ब = ∠क. ∴ બાદબાકી કરીને ∠अबल = ∠अकल. હવે अबल △ અને अकल △માં अब = अक, लब = लक અને ∠अबल = ∠अकल, ∴ △ अबल ≡ △ अकल; ∴ ∠बअल = ∠कअल.

(૯). ∠ब = ∠क અને ∠क = ૭૮°, ∴ ∠ब = ૭૮° છે અને ∠अ = ૧૮૦° − ∠ब − ∠क = ૧૮૦° − ૭૮° − ૭૮° = ૨૪°.

(૧૦). अबक △ માં अब = अक; અને अ, ब, क ની સામેની બાજુઓનાં ड, इ, फ અનુક્રમે મધ્યબિંદુઓ છે હવે बडफ △ અને कडइ△ માં बफ = ½ अब = ½ अक = कइ, बड = डक, અને ∠ब = ∠क; ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ डफ = डइ ∴ डफइ △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૧૧). अबक △માં अब = अक; અને इ, अकનું અને फ, अबનું મધ્યબિંદુ છે હવે बइक △ અને कफब △માં बक સામાન્ય છે, અને इक = ½ अक = ½ अब = बफ, અને ∠क = ∠ब, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बइ = कफ.

(૧૨). ∠अबक = ∠अकब (પ્ર૦ સિ. ૧૨), ∴ તેઓના અર્ધા ખુણાઓ પણ બરાબર છે; ∴ ∠इबक = ∠फकब. હવે इबक △ અને फकब △માં बक સામાન્ય છે, અને ∠इबक = ∠फकब અને ∠इकब = ∠फबक, ∴ △ इबक ≡ △ फकब; ∴ बइ = कफ.

(૧૩). अबक △માં अब = अक, અને बड, ∠बને અને कड, ∠कને દુભાગી डમાં મળે છે. डप ⊥ बक દોરો. હવે डबप △ અને डकप △માં ∠डबक = ½ ∠अबक = ½ ∠अकब = ∠डकब, અને डपब = ૧ ⌊ = ∠डपक અને डप સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ डब = डक વળી अडब △ અને अडक △ માં अब = अक, बड = कड, ∠ अबड = ∠अकड, ∴ अबड △ ≡ अकड △ ∴ ∠बअड = ∠कअड.

(૧૪) डबक △ અને इकब △ માં ∠ डबक = ૧ ⌊ = ∠ इकब, ∠डकब = ∠इबक અને बक સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે.

(૧૫). अबकड સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે. बड સાંધો. अबड △ માં ∠अबड = ∠अडब; અને कबड △ માં ∠कबड = ∠कडब, ∴ આખો ∠ब = ∠ड. એજ પ્રમાણે આખો ∠अ = ∠क.

(૧૬). अबकड ચોરસમાં अक સાંધો. डअक △ માં ∠डअक = ∠डकअ પણ डअक △ માં ત્રણે ખૂણા = ૨ કાટખૂણા અને ∠ड = ૧ કાટખૂણો. ∴ ∠डअक + ∠डकअ = ૧ કાટખુણો. માટે ∠डअक = ½ કાટખુણો = ∠डकअ.

(૧૭). अबड △ અને बकड △ માં अब = बक, अड = डक અને ∠अ = ∠क (પ્રશ્ન ૧૫) ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠अडब = ∠कडब; ∠अबड = ∠कबड; ∴ अडक = ∠अबक.

(૧૮). अबक△ માં अब = अक. अक ને ड સુધી લંબાવો. હવે ∠अबक = ∠अकब. અને ∠अबक + ∠ अकब + ∠अ = ૨ કાટખુણા. ∴ ∠अबक + ½ ∠अ = ∠अकब + ½ अ = ૧ કાટ. ∴ ∠अकब < ૧ કાટ. ∴ ∠अकब નો ન્યૂનતાપૂરક ∠बकड > ૧ કાટ.

(૧૯). ધારો કે अ બહારના બિંદુમાંથી बकड સીધી લીટી સુધી अब = अक = अड દોરી શકાય છે. ∴ अबक △ અને अबड △ સમદ્વિબાજુ છે, ∴ ∠अबक = ∠अकब અને ∠अबक = ∠अडब ; ∠अकब = ∠अडक. એટલે अकड △ નો બહારનો ખૂણો अकब, અંદરના સામેના ∠ अडक બરાબર છે. પણ એ અશક્ય છે (પ્ર૦ સિ. ૮, ઉપ. ૧.) માટે अ માંથી बकड સુધી બે કરતાં વધારે સરખી લીટી દોરી શકાય નહિ.

(૨૦). अबक સમદ્વિબાજુ △ ના પાયા बक ને ड સુધી લંબાવો. ત્યારે ∠अकड > ∠अ: તેમજ ∠अकड > ∠ब એટલે ∠क પણ. ∴ ∠अकड > △ નો કોઇપણ ખૂણો.

(૨૧). જુઓ ઉપર પ્રશ્ન ૧૮ માંની સિદ્ધતા.

(૨૨). अबक સમદ્વિબાજુ કે સમબાજુ △ લો અને बइ, कफ સામેની બાજુ પર લંબ દોરો. ત્યારે इबक △ અને फबक △ માં ∠इकब = ∠फबक, ∠इ = ૧ કાટ. = ∠फ અને बक સામાન્ય છે. ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बइ = कफ. સમબાજુ △ માં ત્રણે શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ પર દોરેલા લંબ બરાબર છે, કારણ કે ગમે તે બાજુને પાયા તરીકે લેખી શકાય છે.

(૨૩). अबक સમદ્વિબાજુ △ માં अब = अक ; અને बक ના મધ્ય બિંદુ ड માંથી, अक ઉપર डइ લંબ અને अब ઉપર डफ લંબ દોરી છે. હવે इडक △ અને फडब △ માં डक = बड, ∠इ = ૧ કાટ. = ∠फ અને ∠क = ∠ब, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે ; ∴ डइ = डफ.

(૨૪). डअब △ એવો લો કે डअ = डब. बड લંબાવી डक = डअ કરી अक સાંધો. હવે डअब △ માં डअ = डब, ∴ ∠डअब = ∠डबअ ; અને डअक △ માં ∠डकअ = ∠डअक. ∴ अबक △ માં ∠ब + ∠क = ∠बअक ; અને △ ના ત્રણે ખૂણા = ૨ કાટખૂણા. ∴ अबक △ કાટખૂણ છે. અને તેમાં डअ = डक = डब છે.

(૨૫). સમબાજુ △ ના ત્રણે ખૂણા સરખા છે અને બધા ખુણા મળી બે કાટખુણા છે માટે દરેક ખુણો $\frac{2}{3}$ કાટ. છે.

(૨૬). કાટખુણ સમદ્વિબાજુ △ માં એક ખુણો કાટખુણો છે અને બાકીના બે જે સરખા છે તે મળી એક કાટખુણો છે માટે દરેક સરખા ખુણો $\frac{1}{2}$ કાટખુણો છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૩ મેાં.

(૧). अबक △ ની બે બાજુ લંબાવતાં બહારના ખુણા બરાબર છે માટે તેઓની પાસેના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા પણ બરાબર છે. ∴ △ ના બે ખુણા બરાબર છે; ∴ △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૨). अब = अक, ∴ ∠अकब = ∠अबक. ∴ તેઓના અર્ધા ખુણા डकब અને डबक પણ બરાબર છે; ∴ डबक ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે.

(૩). डअक △ અને डअब △ માં अक = अब, डक = डब અને ∠डकअ = ∠डबअ, ∴ △ આ સર્વસમાન છે. ∴ ∠डअक = ∠डअब. (જુઓ પ્ર. સિ. ૧૨, પ્રશ્ન ૧૩.)

(૪). डब સાંધો. अडब △ માં अब = अड, ∴ ∠अडब = ∠अबड અને ∠अडक = ∠अबक, ∴ બાકીનો ∠कडब = બાકીનો ∠कबड; ∴ कडब △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૫). अबप △ અને अकड △ માં ∠बअप = ∠कअड. अप = अड અને ∠अपब = ૨ કાટ. − ∠अपड = ૨ કાટ. − ∠अडप (∵ अप=अड) = ∠अडक, ∴ अबप △ ≡ अकड △; ∴ ∠ब = ∠क; ∴ अब = अक છે.

(૬). ∠अबक = ૨ ∠अ. ∴ ∠अबड = $\frac{1}{2}$ ∠अबक = ∠अ ∴ अड = बड.

(૭). अबक △ ની बक ને ड સુધી લંબાવી છે. અને कइ લીટી ∠अकड ને દુભાગી अब ની ∥ છે. હવે अब ∥ कइ, ∴ ∠अबक = ∠इकड; અને ∠अ = ∠अकइ. પણ ∠अकइ = ∠इकड; ∴ ∠अबक = ∠अ. ∴ कअ = कब.

(૮). કારણકે પાયાની સમાન્તર દોરેલી લીટી બાજુઓ સાથે જે ખૂણા કરે છે તે ત્રિકોણના સરખા ખૂણાની બરાબર છે (અથવા ન્યૂનતા પૂરક છે). માટે સમાન્તર દોરેલી લીટી બીજો સમદ્વિબાજુ △ બનાવે છે.

(૯). ∠बअक ને દુભાગનારી अड લીટીના ड બિંદુમાંથી डब ∥ अक દોરી છે અને डब, अब ને ब માં મળે છે. ∵ अक ∥ बड, ∴ ∠बडअ = ∠डअक; પણ ∠डअक = ∠डअब. ∴ ∠बडअ = ∠डअब. ∴ अडब △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૧૦). अबक △ માં अब = अक, અને बक પાયા ઉપરનો डइफ લંબ अक ને इ માં અને बअ ને फ માં છેદે છે. ∵ ड આગળના ખૂણા

કાટખૂણા છે અને ∠ब = ∠क; ∴ ∠फ = ૧ કાટ. − ∠ब = ૧ કાટ. − ∠क = ∠डइक = ∠अइफ; ∴ अफइ △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૧૧). પ્રશ્ન ૯ માં डक ‖ अब દોરો. बड = बअ એજ પ્રમાણે कड = कअ. વળી अबडक ‖ કોણ છે; ∴ अक = डब, અને अब = कड. ∴ अब = बड = डक = कअ. ∴ अबडक રોમ્બસ છે. જો ∠बअक કાટખૂણો હોય તો अबडक ચોરસ છે.

(૧૨). ∠प = ∠पबक = ∠पबअ; ∴ अप = अब. એજ પ્રમાણે ∠अमब = ∠मबड = ∠मबअ; ∴ अम = अब; ∴ अप = अब = अम. વળી ∠प + ∠म = ∠अबप + ∠अबम = ૧ કાટ, ∵ पमब △ ના ત્રણે ખૂણા મળી બે કાટખુણા છે. ∴ △ पमब કાટખૂણ છે.

(૧૩). म મધ્યબિંદુ છે. मअ = मप = मब. ∴ ∠मअप = ∠मपअ અને ∠ मपब = ∠मबप. ∴ આખો ∠प = ∠अ + ∠ब = ૧ ∟.

(૧૪). अ આગળના ત્રણે ખુણા દરેક ૬૦° છે. માટે लअर સીધી લીટી છે.

(૧૫). अबक △ માં अब = अक. ड, अब નું અને इ, अक નું મધ્યબિંદુ છે. તેથી डअब △ ≡ इअब △. ∴ डक = इब છે.

(૧૬). પ્રશ્ન ૧૩ પ્રમાણે કરો.

(૧૭). अ આગળ ∠क બરાબર ∠ क.अड કરો.

(૧૮). अ માંથી बक ‖ अइ દોરો. ∴ ∠क + ∠अइक = ૨ ∟. ∴ ∠क = ∠अइड. પણ ∠ड = ∠क ∵ તે ∠अ, ∠ब ના ન્યૂનતાપુરક છે. ∴ अड = अइ = बक છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૪ મો.

(૧). જો બે ત્રિકોણોમાં એકના ત્રણે ખુણા બીજાના ત્રણે ખુણાની અનુક્રમે બરાબર હોય તો ત્રિકોણોની મળતી આવતી બાજુઓ પણ અનુક્રમે બરાબર છે– આ સિદ્ધાંત હંમેશાં સત્ય નથી. अबक △ લો. बक ‖ डइ એવી દોરો કે તે अब ને ड માં અને अक ને इ માં છેદે. અહીં डइ ‖ बक, ∴ ∠अडइ = ∠ब, અને ∠अइड = ∠क; એટલે अबक △ ના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે डइब △ ના ત્રણ ખૂણા બરાબર છે. પણ બાજુઓ બરાબર નથી.

(૨). अबकड વર્તુળમાં म મધ્યબિંદુ છે, અને अब જ્યા = कड છે. अम, बम, कम, डम સાંધો. હવે अबम △ અને कडम △ માં अब = कड, अम = कम (ત્રિજ્યાઓ) અને बम = डम (ત્રિજ્યાઓ), ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે ∴ ∠अमब = ∠कमड.

(૩). अक, बड સાંધો. ∠अमब = ∠कमड; અને બન્નેમાં ∠बमक ઉમેરો. ∴ ∠अमक = ∠बमड. હવે अमक ∠ અને बमड △ માં બબ્બે બાજુઓ અને અંતર્ખુણાઓ બરાબર છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अक = बड.

(૪). अमड △ અને बमड △ માં अम = बम, अड = बड અને मड સામાન્ય છે; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠ मडअ = ∠ मडब; અને આ પાસે પાસેના ખુણા છે ∴ એ દરેક કાટખુણો છે. ∴ मड ⊥ अब છે.

(૫). अबक △, डबक △, बक પાયા ઉપર વિરૂદ્ધ બાજુએ છે. अड સાંધો. હવે अबड △ અને अकड △ માં अब = अक, डब = डक અને डअ સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠बअड = ∠कअड, અને ∠बडअ = ∠कडअ છે.

(૬). इडफ △ અને इअफ △ માં इड = इअ, फड = फअ અને इफ સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠ डइफ = ∠ अइफ. इफ લંબાવી પાયાને र માં મળવા દો. હવે इडर △ અને इअर △ માં इड = इअ, इर સામાન્ય છે, અને ∠डइर = ∠अइर; ∴ ત્રિકોણો સર્વસમાન છે, ∴ र આગળના બન્ને ખૂણા બરાબર છે. તેથી એ દરેક કાટખૂણો છે. ∴ इफ ⊥ डअ છે.

(૭). डइफ △ અને अइफ △ માં એકની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુની બરાબર છે. ∴ ∠डइफ = ∠अइफ. વળી डइम △ અને अइम △ માં (इफ, डअ, म માં છેદે છે) डइ = अइ, इम સામાન્ય છે, અને ∠डइम = ∠अइम, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠डमइ = ∠अमइ; પણ આ પાસે પાસેના ખુણા છે, ∴ इफ ⊥ डअ છે.

(૮). प, र મધ્યબિંદુવાળા બે વર્તુળો अ, क માં છેદે તેમ દોરો. અને पअ, पक, रअ, रक, अक સાંધો. ત્યારે अक ની વિરૂદ્ધ બાજુએ अपक △ અને अरक △ સમદ્વિબાજુ છે. ∴ પ્રશ્ન ૭ પ્રમાણે अक ⊥ पर છે.

(૯). પ્રશ્ન ૭ પ્રમાણેની સિધ્ધતા લો. અને બતાવો કે ∠डअक = ∠बअक; ∠डकअ = ∠बकअ; અને अक ⊥ बड છે.

(૧૦). अडक △ અને बकड △ માં अड = बक, डक સામાન્ય છે, અને अक = बड, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠अडक = ∠अकड; અને ∠मकड = ∠मडक. વળી ∵ △ मकड માં ∠मकड = ∠मडक, मड = मक ∴ △ मकड સમદ્વિબાજુ છે.

(૧૧). अबकड ચતુષ્કોણમાં अक સાંધો. હવે अबक △ અને अडक △ માં अब = कड, बक = अड અને अक સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠ब = ∠ड. અને વળી ∠बअक = ∠अकड, અને ∠बकड = ∠कअड, ∴ આખો ∠बअड = આખો ∠बकड.

(૧૨). અને (૧૩). अबकड રોમ્બસમાં अक, बड સાંધો. હવે अक પાયા ઉપર સમદ્વિબાજુ अडक △ અને अबक △ વિરૂદ્ધ બાજુએ છે; ∴ પ્રશ્ન ૭ પ્રમાણે अक ⊥ बड છે અને વળી પ્રશ્ન ૭ ની સિદ્ધતા પ્રમાણે बड, ∠ब, ∠ड ને અને अक, ∠अ, ∠क ને દુભાગે છે.

(૧૪). म મધ્યબિંદુના બે સમકેંદ્ર વર્તુળો દોરો અને તેઓને છેદતી એક अबकड લીટી દોરો. मइ ⊥ अड દોરો. હવે अमड કે बइक સમદ્વિબાજુ △ માં मइ ⊥ अड કે बक છે; ∴ હવે अमइ △ અને डमइ △માં अम = डम, ∠अ = ∠ड અને इ આગળના ખુણા કાટખુણા છે માટે તે બરાબર છે; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अइ = इड. એજ પ્રમાણે बइ= इक. ∴ अइ – बइ = इड – इक. ∴ अब = कड. ∴ अब + बक = कड + बक. ∴ अक = बड. વળી अमक △ અને डमब △ માં એકની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુની બરાબર છે. ∴ ∠अमक = ∠बमड.

(૧૫). ને (૧૬). પુસ્તકને છેડે જુઓ.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૫ મો.

(૧) अकब △ પર डइफ △ એવી રીતે મુકો કે ड, अ ઉપર પડે અને डइ, अक ઉપર પડે; અને ∵ डइ = अक, ∴ इ, क ઉપર પડે છે: અને ∵ ∠इ = ∠क = ૧ કાટખુણો, ∴ इफ, कब ઉપરજ પડશે. અને डइ, अब ની બાજુ તરફ પડે તો अ માં कब સુધી બે સરખી લીટી

अब, डइ, એકજ તરફ છે; ∴ डइ, अब, એકજ બિંદુ बमां क.बने મળવી જોઇએ. ∴ डइफ △ अब.ब ઉપર બરાબર પડે છે. ∴ △ઓ સર્વસમાન છે.

(૨). बरक △ અને कमब △ માં बक કર્ણ સામાન્ય છે, અને बम= कर, અને ∠र = ૧ કાટખૂણો = ∠म, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠ब= ∠क; ∴ अक = अब.

(૩). ड માંથી बक ⊥ डप, अक ⊥ डर અને अब ⊥ डल દોરો. હવે बडप △ અને बडल △ માં बड સામાન્ય છે, ∠प = ૧ કાટખુણો = ∠ल અને ∠डबप = ∠डबल; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ डप = डल. એજ પ્રમાણે डप = डर. ∴ डल = डर. હવે अडल △ અને अडर △ માં अड કર્ણ છે, ∠ल = ∠र = ૧ કાટખુણો, અને डल = डर, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે; (સિ. ૧૫). ∴डअ, ∠अ ને દુભાગે છે.

(૪). अबड △ અને अकड △ માં अब કર્ણ = अक કર્ણ, ∠अडब = કાટખુણો = ∠अडक, અને अड સામાન્ય છે; ∴ △ઓ સર્વ-સમાન છે (પ્ર. સિ. ૧૫).

(૫). ∠बअक ની શાખા લીટીઓ પર मब, मक લંબ સરખી છે. હવે △ अबम અને △ अकम માં ∠ब = કાટખુણો = ∠क, अम કર્ણ સામાન્ય છે, અને मब = मक; ∴ △ ઓ સર્વ સમાન છે. ∴ ∠मअब = ∠मअक ∴ म બિંદુ ∠बअक ની દુભાગનારી લીટી પર છે.

(૬). म મધ્યબિંદુનો अबक વર્તુળ દોરો; અને તેમાં अब જ્યા દોરો. अब ⊥ मप દોરો. मअ, मब સાંધો. હવે अमप △ અને बमप △ માં अम કર્ણ = बम કર્ણ, ∠अपम = કાટખૂણો = ∠बपम, અને मप સામાન્ય છે; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴अप = पब.

(૭). म મધ્યબિંદુના વર્તુળમાં अब, कड એ સરખી જ્યા દોરો. मप ⊥ अब અને मर ⊥ कड દોરો. मब, मक સાંધો. હવે પ્રશ્ન ૬ પ્રમાણે पब = पअ, અને रक = रड. પણ अब = कड; ∴ पब = रक. વળી मपब △ અને मरक △ માં मब = मक, ∠मपब = કાટખૂણો = ∠मरक, અને पब = रक, ∴ △ સર્વસમાન છે. ∴ मप = मर. એ પ્રમાણે ગમે તેટલી સરખી જ્યા દોરીએ તો તેના ઉપર મધ્યબિંદુમાંથી દોરેલી લંબો બરાબર છે.

(૮). अबक △ માં बइ ⊥ अक અને कफ ⊥ अब છે. અને बइ = कफ. હવે बइक △ અને कफब △ માં ∠इ = કાટખુણો = ∠फ, बइ = कफ અને बक સામાન્ય છે; ∴ ∠बकइ = ∠कबफ. ∴ अब=अक.

(૯). अबक △ માં बक ના મધ્યબિંદુ ड માંથી डइ ⊥ अक અને डफ ⊥ अब છે. હવે △ बडफ અને △ कडइ માં बड કર્ણ = कड કર્ણ, ∠फ = કાટખુણો = ∠इ અને फड = इड; ∴ ∠ब = ∠क. ∴ अक = अब.

(૧૦). હવે अपब △ અને डमइ △ માં अब કર્ણ = डइ કર્ણ, ∠प = કાટખુણો = ∠म, અને अप = डम, ∴ बप = इम (પ્ર. સિ. ૧૫). તેજ પ્રમાણે अपक △ અને डमफ △ લેતાં पक = मफ. ∴ बक = इफ. વળી अबक △ અને डइफ △ માં એકની ત્રણ બાજુ બીજાની ત્રણ બાજુની અનુક્રમે બરાબર છે. ∴ આ ત્રિકોણો સર્વસમાન છે. (પ્ર. સિ. ૧૪).

(૧૧). હવે अपब △ અને डमइ △ સર્વસમાન છે. (પ્રશ્ન ૧૦). ∴ ∠अबप = ∠डइम. હવે △ अबक અને △ डइफ માં अब = डइ, बक = इफ અને ∠ब = ∠इ, ∴ આ ત્રિકોણો સર્વસમાન છે (પ્ર.સિ. ૧૦).

(૧૨). ल મધ્યબિંદુ ને प, क સાથે સાંધો. હવે अपल △ અને बकल △ માં पल = कल, पम લંબ, = कड લંબ ∴ પ્રશ્ન ૧૦ અને ૧૧ પ્રમાણે આ △ઓ બરાબર છે. ∴ अप = बक. વળી अपब △ અને बकअ △ માં अब સામાન્ય છે, અને अप = बक, અને ∠पअब = ∠कबअ. ∴ આ ત્રિકોણો સર્વસમાન છે.

ત્રિકોણોની સમાનતાપરના સામાન્ય પ્રશ્નોના ઉત્તર.

(૧). (અ). △ ઓ સરખા નથી; ∵ ∠अ, अ′ અંતર્ખુણા નથી.

(બ). △ ઓ સરખા હોય કે ન હોય; ∵ ∠ब, ब′ કાટખૂણા નથી.

(ક). △ ઓ સરખા હોય કે ન હોય; ∵ કોઈ પણ બાજુઓ સરખી આપી નથી.

(ડ). △ ઓ સરખા છે; પ્ર.સિ. ૧૪ પ્રમાણે.

(ઇ). △ ઓ સરખા છે; ∵ ∠क, ∠क′ કાટખૂણા છે.

(ફ). △ ઓ સરખા હોય કે ન હોય; ∵ ∠क, ∠क′ કાટખૂણા નથી.

(લ). △ ઓ સરખા છે; ∵ ∠अ, ∠अ′ કાટખૂણા છે.

(પ). △ ઓ સરખા હોય કે ન હોય; ∵ ∠ब, ब′, કાટખૂણા નથી.

(ય) △ ઓ સરખા છે, પ્ર. સિ. ૧૦ પ્રમાણે

(૨). (૧) પ્રમાણે.

(૩). ત્રિકોણના માંહેના ખૂણાઓનો સરવાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે.

(૪). ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો માંહેના સામેના કોઇ પણ ખૂણાથી મોટો છે; અને તે માંહેના સામેના બે ખુણા બરાબર છે અને ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે લંબાવતાં થતા ત્રણે બહારના ખુણાઓ મળી ચાર કાટખુણા બરાબર છે.

(૫). હા કારણ કે ત્રિકોણની બાજુઓ અનુક્રમે લંબાવતાં ત્રણ અંદરના ખુણા સાથે ત્રણ બહારના ખુણા થાય છે અને એક અંદરનો ખુણો અને તેની પાસેનો એક બહારનો ખુણો મળી બે કાટખુણા બરાબર છે (પ્ર. સિ. ૧) માટે બધા અંદરના ખુણા અને બધા બહારના ખુણા મળી છ કાટખૂણા બરાબર છે અને પ્ર. સિ. ૮ પ્રમાણે ત્રણે અંદરના ખૂણા મળી બે કાટખૂણા બરાબર છે; માટે ત્રણે બહારના ખૂણા મળી ચાર કાટખૂણા બરાબર છે.

(૬). (પ્રતિજ્ઞા જોઇ લેવી) સિ. ૧; ૪; ૬; ૧૦; ૧૧; ૧૨; ૧૪; ૧૫.

(૭). જુઓ ત્રિકોણોની સમાનતા ઉપરની નોટ.

(૮). જુઓ ત્રિકોણોની સમાનતા ઉપરની નોટ. જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુ બીજાની બે બાજુની અનુક્રમે બરાબર હોય અને એમાં એક બાજુની સામેનો ખૂણો બીજામાં તેની મળતી આવતી બાજુની સામેના ખૂણા બરાબર હોય તો ત્રિકોણો સરખા હોય કે ન હોય.

(૯). સમદ્વિબાજુ, સમબાજુ, વિષમબાજુ.

(૧૦). સાંકડખૂણ, પહોળખૂણ, કાટખૂણ.

(૧૧). ને (૧૨) अब ⊥ कड છે. અને अक, अड, એવી રીતે कबड સુધી દોરો કે ∠कअब = ∠डअब હોય. હવે △ अबक અને △ अबड માં अब સામાન્ય છે, ∠अबड = કાટખૂણો = ∠अबक, અને ∠बअक = ∠बअड, ∴ △ એ સર્વ સમાન છે; ∴ अक = अड.

(૧૩). अबक △, डइफ △ માં अब = डइ, अक = डफ અને ∠ब = ∠इ; હવે △ अबक ને ઉંચકીને △ डइफ ઉપર એવી રીતે મૂકો કે ∠ब, ∠इ ઉપર પડે; અને ∵ ∠ब = ∠इ, ∴ बअ, इड ઉપર અને बक, इफ ઉપર પડે છે. અને ∵ बअ = इड, ∴ अ, ड ઉપર પડે છે. તેથી अबक △ ને ઉંચકીને મેલતાં ને डइफ સ્થિતિમાં પડે છે. જો क, फ ઉપર મળી જાય તો अबक △ ≡ डइफ △. ∴ ∠क = ∠डफइ. પણ જો क, प સ્થિતિમાં પડે તો अड = डप = डफ ∴ डपफ △ સમદ્વિબાજુ છે; ∴ ∠प = ∠डफप. પણ ∠डफप, ∠डफइ

ન્યૂનતાપૂરક છે. અને ∠डवफ = ∠डफर. ∴ ∠डवफ, ∠डफइ ન્યૂનતા-પૂરક છે. એટલે ∠डवफ, ∠क ન્યૂનતાપૂરક છે.

(૧૪). સરખી બીજી જોડની સામેના ખુણા સાંકડા, પહોળા, કે કાટખૂણા છે એમ કર્યું હોય તો △ ઓ સર્વસમાન છે. આપેલા ખૂણાઓ કાટખૂણા કે પહોળા ખૂણા હોય તો △ ઓ સર્વસમાન છે.

---

§ ૧૭. ત્રિકોણમાં બાજુ ને ખુણાનો સંબંધ.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૬ મો.

(૧). કોઇ પણ △માં સૌથી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો સૌથી મોટો છે; અને સૌથી નાની બાજુની સામેનો ખુણો સૌથી નાનો છે.

(૨). કોઈ પણ ત્રિકોણમાં એક ખુણો કાટખુણો કે પહોળો ખુણો હોય તો બાકીના બે ખુણા સાંકડા હોવા જોઇએ. અને △માં સૌથી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો સૌથી મોટો હોવો જોઇએ, માટે આ ખુણો જો કાટખુણો કે પહોળો ખુણો હોય તો બાકીના બે સૌથી મોટી બાજુપરના ખુણા સાંકડા છે. △માં ત્રણે ખુણા સાંકડા હોય તો કાંઇ સિદ્ધ કરવાનું રહેતું નથી.

(૩). अक, बड સાંધો. હવે अबक △માં बक > अब, ∴ ∠बअक > ∠बकअ; અને अकड △માં कड > अड, ∴ ∠डअक > ∠डकअ; ∴ ∠अ > ∠क. વળી अबड △માં अड > अब, ∴ ∠अबड > ∠अडब; અને कबड △માં कड > बक, ∴ ∠कबड > ∠कडब; ∴ ∠ब > ∠ड; એટલે ∠ड < ∠ब.

(૪). इड, डक સાંધો. હવે अइड △ અને अइक △માં अड = अक, अइ સામાન્ય છે, અને ∠डअइ = ∠कअइ, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે (પ્ર. સિ. ૧૦). ∴ ∠अडइ = ∠क. પણ ∠अडइ > ∠ब, ∴ ∠क > ∠ब છે.

(૫). अबक △માં अब > अक છે, અને अडને પાયા સુધી દોરી છે. अब > अक, ∴ ∠क > ∠ब પણ ∠अडब > ∠क, ∴ ∠अडब > ∠ब; ∴ अब, अड કરતાં મોટી છે. એટલે अમાંથી कब સુધી દોરેલી લીટી < મોટી બાજુ.

(૬). अब = अक હોય એવો अबक △ દોરો. હવે ∠अडब > ∠क; પણ ∠क = ∠ब; ∴ ∠अडब > ∠ब; ∴ अब > अड; એટલે अक પણ > अड.

(૭). बड સાંધો. હવે ∠अकब > ∠ड; પણ अब = अड; ∴ ∠अबड = ∠ड; ∴ ∠अकब > ∠अबड એટલે ∠अकब > ∠अबक પણ છે.

(૮). ધારો કે સરખા ખુણા ∠ब, ∠कની સામેની બાજુ સરખી નથી; એટલે अब > अक ધારો. ત્યારે ∠क, > ∠ब, પણ એ શક્ય છે માટે अब, अक કરતાં મોટી નથી તેમજ अब, अक કરતાં નાની પણ નથી, ∵ ત્યારે ∠क < ∠ब છે; પણ એ અશક્ય છે. ∴ अब = अक. ∴ △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૯). अइ, ∠डअबને દુભાગી डब ને इ માં મળે છે. હવે अडइ △ અને अबइ △ માં अड = अब, अइ સામાન્ય છે અને ∠डअइ = ∠बअइ; ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠अइड = ∠अइब. ∴ अइ ⊥ डब.

વળી ∠ब − ∠क = ∠अबक − ∠अकब = ∠अबड + ∠डबक − ∠अकब = ∠अडब + ∠डबक − ∠डकब = ∠डकब + ∠डबक + ∠डबक − ∠डकब = २ ∠डबक. ∴ ∠डबक = $\frac{1}{2}$ ∠ (ब − क).

વળી ∠ब + ∠क = ∠अबक + ∠अकब = ∠अबड + ∠डबक + ∠अकब = ∠अबड + ∠अबड = २ ∠अबड. ∴ ∠अबड = $\frac{1}{2}$ ∠(ब + क).

(૧૦). बड સાંધો. હવે अबड △માં अब > अड, ∴ ∠अडब > ∠अबड; અને कबड △માં बक > डक, ∴ ∠बडक > ∠डबक; ∴ આખો ∠ड > ∠ब.

(૧૨). अब ∥ डक, ∴ ∠अबड = ∠बडक. પણ अब > अड, ∠अडब > ∠अबड. ∴ ∠अडब > ∠बडक છે.

(૧૩). अबक △માં अब > अक. अम મધ્યગા છે અને अल, ∠बअक ને દુભાગે છે अम ને र સુધી લંબાવી अम = मर કરો. अबम △ ≡ कमर △ ∴ अब = रक. ∴ रक > अक. ∴ ∠कअर > ∠र; એટલે ∠कअम > ∠बअम, ∴ ∠बअम, $\frac{1}{2}$ ∠बअक થી નાનો છે. ∴ अम લીટી अब, अल ની વચ્ચે છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૭ મો.

(૧). કાટખુણ Δમાં એક ખુણો કાટખુણો છે, માટે બાકીના બે ખુણા પૈકી દરેક કાટખુણા કરતાં નાનો છે; માટે કર્ણ સૌથી મોટી છે.

(૨). જુઓ પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૬ ઉપરનો ૨ જો પ્રશ્ન.

(૩). પહોળખૂણ ત્રિકોણમાં એક ખુણો પહોળો છે, માટે બાકીના બે પૈકી દરેક એ ખૂણા કરતાં નાનો છે, માટે પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી છે.

(૪). સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુ કરતાં મોટી છે, માટે એ બાજુ બીજી બાજુ કરતાં મોટી છે

(૫). अ માંથી बक ઉપર अब ⊥ દોરો, અને अक કોઈ પણ લીટી દોરો. હવે Δ अबक માં ∠ब કાટખુણો છે, માટે ∠क, કાટખુણા કરતાં નાનો છે. ∴ अब < अक છે.

(૬). अड સાંધો. ड, बक ની બહાર છે હવે अकड Δ માં ∠अकब > ∠अडक; એટલે ∠अबक > ∠ड; ∴ अड > अब (अक). વળી ड, बक ની અંદર છે. હવે अबड Δ માં ∠अडब > ∠अकब; એટલે ∠अडब > ∠ब; ∴ अड < अब (अक).

(૭). ∠अबक, ∠अकब ને मब, मक દુભાગે છે; અને જો अब > अक, તો ∠अकब > ∠अबक. ∴ ∠मकब > ∠मबक; ∴ मब > मक. અને જો अब < अक, તો ∠अकब < ∠अबक; ∴ ∠मकब < ∠मबक; ∴ मब < मक છે.

(૮). अबड Δ માં ∠अडक > ∠बअड; એટલે ∠अडक > ∠डअक; ∴ अक > कड. એજ પ્રમાણે ∠अडब > ∠डअक; ∴ ∠अडब > ∠बअड; ∴ अब > बड.

(૯). अडब, अडक બન્ને કાટખુણ Δ ઓ છે. ∴ अब > बड, અને अक > डक (પ્રશ્ન ૧).

(૧૦). अब > अक; ∴ ∠अकब > ∠अबक; ∴ क આગળનો બહારનો ખુણો (∠अकबનો ન્યૂનતાપૂરક) < ब આગળનો બહારનો ખુણો (∠अबकનો ન્યૂનતાપૂરક). ∴ ∠बकड < ∠कबड. ∴ बड < कड; ∴ डक > डब.

(૧૧). कडफ △ લેા. ∠फडब એટલે ∠ब > ∠कफड, એટલે ∠ब > ∠अफइ. बइड △ લેા. ∠अइफ > ∠ब; ∴ ∠अइफ > ∠अफइ. ∴ अफ > अइ. ∴ अइ < अफ.

(૧૨) अब > अक, ∴ ∠अकब > ∠अबक છે. ∴ એના કેાટિ-ખુણાનેા ઉલટેા સંબંધ છે; ∴ ∠मबक < ∠मकब. ∴ मब > मक છે.

(૧૩). ∠अमर > ∠ब. અને ∠क (= ∠ब) > ∠लरक. ∴ ∠ब > ∠अरम. ∴ ∠अमर > ∠अरम. ∴ अर > अम છે.

(૧૪). જુઓ આગળ પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૧ મેા.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૮ મેા.

(૧). अबक △માં ∠बને बडથી દુભાગેા અને बडને अक પર डમાં મળવા દેા. ∠बडक > ∠अबड, એટલે ∠डबक. ∴ बक > कड. એજ પ્રમાણે अब > अड. ∴ बक + बअ > कड + डअ; ∴ बक + अब > कअ.

(૨). કેાઇ પણ △માં अब + बक > कअ; ∴ બન્નેમાંથી बक બાદ કરતાં अब > कअ − बक. અને એજ પ્રમાણે बक > अब − अक; અને अक > अब − बक.

(૩). बक પાયા ઉપર એક બાજુએ अबक △ની અંદર डबक △ છે. बड લંબાવી अकને इમાં મળવા દેા. હવે अबइ △માં अब + अइ > बइ; ∴ अब + अइ + इक > बइ + इक; ∴ अब + अक > बइ + इक. વળી डइक △માં डइ + इक > डक; ∴ बड + डइ + इक > बड + डक; ∴ बइ + इक > बड + डक. પણ अब + अक > बइ + इक; ∴ अब + अक > बड + डक.

(૪). अबक △માંના ड બિંદુને अ, ब, क સાથે સાંધેા. હવે डअ + डब > अब; डब + डक > बक; અને डक + डअ > कअ; ∴ ૨ डअ + ૨ डब + ૨ डक > અ + બ + ક ∴ डअ + डब + डक > (અ + બ + ક) ÷ ૨.

(૫). કેાઇપણ △માં બે બાજુઓનેા સરવાળેા ત્રીજી કરતાં મેાટેા છે. ∴ બે બાજુઓનેા સરવાળેા ત્રીજી કરતાં નાનેા હેાય એવેા ત્રિકેાણ હેાઇ શકે નહિ. પણ અહીં ૩·૫ + ·૭ સે.મી. = ૪·૨ સે.મી, અને ત્રીજી બાજુ

૪.૩ સે.મી. છે; એટલે એક બાજુ બીજી બેના સરવાળા કરતાં મોટી છે માટે ત્રિકોણ અશક્ય છે.

(૬). अबकड ચતુષ્કોણમાં अक, बड કર્ણ સાંધો. હવે अब + बक > अक; बक + कड > बड; कड + डअ > अक; डअ + अब > बड; ∴ ચતુષ્કોણની બેવડી પરિમિતિ > કર્ણના બમણા સરવાળા. ∴ બાજુનો સરવાળો > કર્ણના સરવાળો.

(૭). પ્રશ્ન ૩ પ્રમાણે अब + अक > डब + डक; अक + कब > डब + डअ; बक + बअ > डअ + डक. ∴ ૨ (अब + बक + कअ) > ૨ (डअ + डब + डक) ∴ डअ + डब + डक > अब + बक + कअ.

(૮). अबकड ચતુષ્કોણમાં बड સાંધો. अब + अड > बड; ∴ अब + अड + डक > बड + डक. પણ बड + डक > बक. ∴ अब + अड + डक > बक છે.

(૯). मड, डक સાંધો. હવે अबम △ અને अमड △માં अब = अड, ∠बअम = ∠डअम, અને अम સામાન્ય છે, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बम = मड. વળી मडक △માં मड + मक > डक. પણ मड = मब; ∴ मक + मब > डक; ∴ कब > कड.

(૧૦). જુઓ પ્રશ્ન ૩ ની સિદ્ધતા, अबड △માં अब + अड > बड; ∴ अब + अड + डक > बड + डक. ∴ अब + अक > बड + डक છે.

(૧૧). म મધ્યબિંદુવાળા વર્તુળમાં अब જ્યાં છે, मअ, मब સાંધો. मअब △ માં मअ + मब > अब. પણ मअ + मब = બે ત્રિજ્યા=વ્યાસ. ∴ વ્યાસ > अब. ∴ જ્યા < વ્યાસ છે.

(૧૨). अबक △ માં अड મધ્યગા છે. अड લંબાવી डइ = अड કરો. इक સાંધો. હવે अडब △ અને इडक △ માં अड = डइ, डब = डक, ∠अडब = ∠कडइ; ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ अब = कइ. વળી अकइ △ માં अक + कइ > अइ; ∴ अक + अब > ૨ अड.

(૧૩). પ્રશ્ન ૧૨ પ્રમાણે अब + अक > ૨ अड; बअ + बक > ૨ बफ (મધ્યગા); અને कअ + कब > ૨ कर (મધ્યગા). ∴ સરવાળો કરીને અને ૨ થી ભાગીને ત્રિકોણની પરિમિતિ > મધ્યગાનો સરવાળો.

(૧૪). अब + बड > अड; અને अक + कड > अड; ∴ સરવાળો કરીને अब + बक + कअ > ૨ अड; ∴ अड < Δ ની અર્ધી પરિમિતિ.

(૧૫). पअ + पब > अब; અને पक + पड > कड; ∴ अब + कड < पअ + पब + पक + पड. એજ પ્રમાણે अड + बक < पअ + पब + पक + पड. વળી पअ + पक > अक; અને पड + पब > डब. ∴ पअ + पब + पक + पड > अक + डब.

૧૬. अड + डइ > अइ; अक + कड > अड; अब + बक > अक વગેરે. ∴ अब + बक + कड + डइ > अइ છે.

(૧૭). अम + मब > अब; मब + मक > बक; અને मक + मअ > अक. ∴ मअ + मब + मक > $\frac{1}{2}$ (અ + બ + ક).

(૧૮). પ્રશ્ન ૧૭ પ્રમાણેજ સિદ્ધતા લો.

(૧૯). अबक Δ માં अम મધ્યગા છે. अम + मब > अब. अम + मक > अक. ∴ ૨ अम + ૨ मब > अब + अक. ∴ अम + मब > $\frac{1}{2}$ (अब + अक) છે.

(૨૦). પ્રશ્ન ૧૯ પ્રમાણેજ કરો. अम, बर, कल મધ્યગા છે. ૨ अम + बक > अब + अक; ૨ बर + अक > बअ + बक; ૨ कल + अब > कअ + कब. ∴ ૨ (अम + बर + कल) > अब + बक + कअ.

(૨૧). अक, बड કર્ણો म માં છેદે તો मअ + मब > अब અને मक + मड > कड. ∴ કર્ણો મળી > अब + कड. તેમજ કર્ણો મળી > अड + बक. કર્ણોનો સરવાળો > અર્ધી પરિમિતિ છે.

---

§ ૧૮. અસમાન ત્રિકોણો ને લંબનું મહત્વ.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૯ અને ૨૦ મા.

(૧). अक, बक, डफ, इफ સાંધો. હવે अकब, डफइ Δ ઓમાં अक = बफ, बक = इफ, अब > डइ, ∴ ∠क > ∠फ (પ્ર૦ સિ૦ ૨૦).

(૨). अक > अब, ∴ ∠अबक > ∠अकब; ∴ ∠बकइ > ∠कबड. અને बकइ, कबड Δ ઓમાં कइ = बड, कब સામાન્ય છે અને ∠बकइ > ∠कबड, ∴ बइ > कड (પ્ર૦ સિ૦ ૧૯).

(૩) પરિધ સુધી कइ કોઇપણ લીટી દોરો. मइ સાંધો. હવે मकइ △માં मक + मइ > कइ પણ मइ = मअ; ∴ मअ + मक > कइ; ∴ એટલે कम > कइ. એજ પ્રમાણે બીજી કોઇપણ લીટી क માંથી દોરીએ તો તે कअ કરતાં નાની છે માટે कअ સૌથી મોટી છે.

(૪). इ અને बની વચ્ચે પરિધ ઉપર કોઇ फ બિંદુ લો. मफ, कफ સાંધો હવે मइक, मफक △ઓમાં मइ = मफ, मक સામાન્ય અને ∠कमइ > ∠कमफ, ∴ कइ > कफ (પ્ર૦ સિ૦ ૧૯) એજ પ્રમાણે પરિધ ઉપરનું फ બિંદુ જેમ જેમ बની પાસે આવતું જાય તેમ તેમ कफ નાની થતી જાય છે અને આખરે ब સ્થિતિમાં તે આવે ત્યારે कफ, એટલે कब સૌથી નાની છે, અથવા मकफ △માં मक + कफ > मफ, ∴ मक + कफ > मब ∴ मक + कफ > मक + कब; ∴ कफ > कब અને એ પ્રમાણે कब સિવાયની કોઇપણ લીટી क માંથી દોરી હોય તો તે कब થી મોટી છે: એટલે कब સૌથી નાની છે.

(૫). હવે पमक, डमक △ઓમાં मप = मड, मक સામાન્ય છે અને ∠पमक > ∠डमक; ∴ पक > डक (પ્ર૦ સિ૦ ૧૯). અને पक > कड આપેલી હોય ત્યારે पमक, ને डमक △ઓમાં मप = मड, मक સામાન્ય છે, અને कप > कड, ∴ ∠पमक > ∠डमक (પ્ર૦ સિ૦ ૨૦)

(૬). પરિધ સુધી કોઇપણ લીટી कइप દોરો. હવે कमप △માં कम + मप > कप; પણ कम + मप = कम + मअ = कअ. ∴ कअ > कप. એજ પ્રમાણે कअ બીજી કોઇ પણ क માંથી પરિધ સુધી દોરેલી લીટીથી મોટી છે. માટે कअ સૌથી મોટી છે. मइ સાંધો. ત્યારે मइ + इक > मक પણ मइ = मब; ∴ मब + इक > मब + बक; ∴ कइ > कब. એજ પ્રમાણે कब સૌથી નાની છે.

(૭). હવે कमप, कमड △ઓમાં कम સામાન્ય છે, मप = मड, અને ∠कमप > ∠कमड, ∴ कप > कड (પ્ર. સિ. ૧૯). અને વળી कप > कड હોય તો कमप, कमड △ઓમાં कम સામાન્ય છે, मप = मड. અને कप > कड, ∴ ∠कमप > ∠कमड (પ્ર. સિ. ૨૦).

(૮). अपक, बपक △ઓમાં अप = पब पक સામાન્ય છે અને अक > बक: ∴ ∠अपक > ∠बपक. પણ ∠अपक + ∠बपक = ૨ ∟; ∴ ∠अपक > ૧ ∟; અને ∠बपक > ૧ ∟. વળી अपड, बपड △ઓમાં अप = पब, पड સામાન્ય છે, અને ∠अपड > ∠बपड, ∴ अड > बड.

(૯). अबक Δમાં अक = बक; अब ઉપર कની સામેની બાજુએ अबड સમબાજુ Δ દોરો. कड સાંધો. હવે अबની વિરૂદ્ધ બાજુએ બે સમદ્વિબાજુ Δઓ છે. માટે कड, ∠अकब, ∠अडबને દુભાગે છે, વળી अकड Δમાં अक > अड (= अब), ∴ ∠अडक > ∠अकड, ∴ ∠अडब > ∠अकब, એટલે ∠अकब < સમબાજુ Δનો ખુણો.

(૧૦). अब પાયા ઉપર अमब Δ, अकब Δની અંદર છે માટે ∠अमब > ∠अकब. પણ ∠अमब = ∠अबम. ∵ ∠अबम > ∠अकब. ∴ ∠अबक > ∠अकब. ∴ अक > अब છે.

(૧૧) अफ + अइ > फइ; कइ + कड > डइ; बड + बफ > फड; ∴ ત્રિકોણની પરિમિતિ > डइ + इफ + फड છે.

(૧૨). अबक Δમાં म બિંદુમાંથી मड, मइ, मफ લંબ અ બ, ક બાજુ ઉપર અનુક્રમે દોરો. अम, बम, कम સાંધો. હવે ड, इ, फ આગળના ખુણા કાટખુણા છે. માટે बम > ડ, कम > ઈ, અને अम > ફ; ∴ बम + अम + कम > ડ + ઈ + ફ. પણ Δમાં म બિંદુ છે માટે પ્ર. સિ. ૧૮ના પ્રશ્ન ૩ પ્રમાણે Δની પરિમિતિ > मअ + मब + मक. ∴ અ + બ + ક > ડ + ઈ + ફ.

(૧૩). अबकड ચતુષ્કોણમાં अक, बड કર્ણ म માં છેદે છે. હવે अम + मड > अड, मड + मक > डक, मक + मब > कब, અને मब + मअ > बअ; ∴ સરવાળો કરીને ૨ (अक + बड) > ચતુષ્કોણની પરિમિતિ. ∴ કર્ણો મળી > અર્ધી પરિમિતિ વળી अड + डक > अक, डक + कब > डब, कब + बअ > अक, અને अब + अड > डब; ∴ સરવાળો કરીને ચ૦ ની બમણી પરિમિતિ > કર્ણોની બમણાઇ; ∴ કર્ણો > પરિમિતિ.

(૧૪). अबकड ચતુષ્કોણમાં કોઇ પણ प બિંદુ લો. पअ, पब, पक, पड સાંધો. अक, बड કર્ણ દોરી તેઓને म માં છેદવા દો. હવે अक < अप + पक; અને बड < पब + पड. ∴ अक + बड < अप + बप + कप + डप. અને એજ પ્રમાણે म સિવાયની કોઇપણ સ્થિતિમાં प હોય તો તે अ, ब, क, ड થી प નાં અંતર मअ, मब, मक, मड નાં અંતર કરતાં વધારે છે. તેથી म માગેલું બિંદુ છે.

(૧૫). अबक Δ માં अब સૌથી મોટી બાજુ હોય તેમ Δ દોરો. बक સુધી अड કોઇ પણ લીટી Δ માં દોરો. હવે अब > अक, ∴ ∠क,

> ∠ब. અને ∠अडब > ∠क, ∴ ∠अडब > ∠ब; ∴ अब > अड. તેથી अड જેવી કોઇ પણ લીટી દોરી હોય તો તેનાથી अब મોટી છે.

(૧૬). अब + बक > अक; कड + डइ > कइ; અ । इफ + फअ > इअ. ∴ પટ્કોણની પરિમિતિ > अकइ △ ની પરિમિતિ છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૧ મો.

(૧). કોઇ પણ अबक △ દોરો. बक ઉપર अम ⊥ દોરો. ધારો કે अम = ૨·૧" છે તો अब કે अक કોઇ પણ ૨·૧"થી વધારે છે.

(૨). अबक △માં ∠ब કાટખુણો છે. હવે अમાંથી बक સુધી अब લંબ દોરી છે; અને अक કોઇ પણ લીટી દોરી છે, ∴ अक > अब એજ પ્રમાણે अक > बक. ∴ अक કર્ણ સૈાથી મોટી છે.

(૩). પ્ર૦ સિ૦ ૨૧ ની આકૃતિમાં मक ની બન્ને બાજુએ मड, मअ એજ સરખી લીટી अब સુધી દોરી શકાય છે. ધારો કે मब ત્રીજી લીટી પણ मड (અથવા मअ) બરાબર દોરી શકાય છે. ત્યારે मड થી मब લીટી ભિન્ન છે; માટે मडब △ માં ∠ब < ∠क; એટલે ∠ब < ૧ કાટખુણો. પણ ∠मडब > ∠क (એટલે ૧ કાટખુણો); ∴ ∠मडब > ∠ब: ∴ मब > मड. તેથી मड બરાબર કોઇ પણ લીટી मक ની मड બાજુ તરફ દોરી શકાય નહિ. એજ પ્રમાણે मअ ની બાજુ તરફ પણ मअ બરાબર કોઇ પણ લીટી દોરી શકાય નહિ.

(૪). अब ના મધ્યબિંદુ म માંથી कमड કોઇ પણ લીટી દોરી તેના ઉપર बड, अक લંબ દોરો. હવે अमक, बमड △ ઓમાં ∠क = ૧ કાટખુણો = ∠ड, ∠अमक = ∠बमड, અને अम = बम; ∴ △ ઓ સર્વ સમાન છે; ∴ अक = बड.

(૫). अबक △ ની अब, अक બાજુનાં फ, इ મધ્યબિંદુથી अब, अक ઉપર દોરેલી લંબ म બિંદુમાં મળે છે; मअ, मब, मक સાંધો. હવે मअफ, मबफ, △ઓમાં मफ સામાન્ય છે, अफ = बफ, અને ∠मफअ = ∠मफब; ∴ △ ઓ સર્વ સમાન છે; ∴ मअ = मब; એજ પ્રમાણે मअ = मक. ∴ म, ત્રણે શિરોબિંદુથી સમાન અંતરે છે.

વળી बक નું ड મધ્યબિંદુ હોય તો मड સાંધો. હવે बमड, कमड △ ઓમાં बम = कम, बड = कड અને मड સામાન્ય છે. ∴ આ △ઓ

સર્વ સમાન છે; ∴ ∠बडम = ∠कडम; ∴ मड ⊥ बक છે. ∴ △ ની બાજુનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી બાજુઓને દોરેલી લંબ એક બિંદુગામી છે.

નોટ. આ म બિંદુ △ ની આસપાસ શિરોબિંદુમાંથી જતા પરિલગ્ન વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

(૬). પ્રશ્ન ૫ પ્રમાણે બતાવો કે म બિંદુ બધાં શિરોબિંદુથી સમાન અંતરે છે. આ म મધ્યબિંદુ લઈ मअ, मब, मक કોઇ પણ ત્રિજ્યા લેતાં દોરેલો વર્તુળ अ, ब, क માંથી જાય છે.

(૭). म મધ્યબિંદુથી દોરેલો વર્તુળ अब ને अ, ब માં છેદે છે; ધારો કે આ વર્તુળ अब ને ड જેવા કોઈ ત્રીજા બિંદુમાં પણ છેદે છે. ત્યારે मब થી मड ભિન્ન છે. અને म માંથી अब સુધી એકજ બાજુએ मब, मड એ સરખી લીટી દોરી છે. પણ એ અશક્ય છે (પ્રશ્ન ૩) માટે अ, ब સિવાય કોઇ પણ ત્રીજા બિંદુમાં વર્તુળ अबને છેદી શકે નહિ.

---

§ ૧૯. સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ ને લીટીના અંતર્છેદ.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૨ મો.

(૧). अबक △માં अब = अक, ∴ ∠ब = ∠क અને डइ ∥ बक, ∴ ∠अइड = ∠ब, અને ∠अइड = ∠क; ∴ ∠अडइ = ∠अइड; ∴ अड = अइ; ∴ बड = कइ ∴ डइकब સમદ્વિબાજુ છે.

(૨) अब ∥ परल, અને अड ∥ इरक, બાજુઓને છેદે તેમ દોરો. હવે अइरप, इबलर, रलकफ, रफडप દરેક ∥ કોણ છે; ∴ ∠अ = ∠इरप = ∠लरप = ∠क; ∠ब = ∠इरल = परफ = ∠ड; ∠अइर = ∠अपर = ∠ड; ∠रलफ = ∠रफक = ∠ड; વળી अइ = पर = डक; इब = रल = फक; अप = इर = बल; અને पड = रफ = लक.

(૩). अबकड ∥ કોણમાં ∠अ, ∠ब ને अम, बम થી દુભાગો હવે ∠डअब + ∠अबक = ૨ ∟. અને अम, बम આ ખુણાઓને દુભાગે છે: ∴ ∠मअब + ∠मबअ = ૧ કાટખૂણો. ∴ अमब △માં ∠म = ૧ કાટખુણો છે.

(૪). अबकड ∥ કોણમાં ∠ब, ∠डને बर, डम થી દુભાગો; અને बर, डक ને र માં મળે છે. હવે ∠अबक = ∠अडक; ∴ ∠अबर = ∠मडक. પણ अब ∥ डक, ∴ ∠अबर = ∠बरक. ∴ ∠बरक = ∠मडर. ∴ बर ∥ डम છે.

(૫). बમાંથી अड ∥ बइ, डकને इમાં મળે તેમ દોરો. હવે अड ∥ बइ, ∴ ∠ड = ∠बइक. અને अबकड ∥ કોણ છે; ∴ अड = बइ = बक; ∴ ∠क = ∠बइक. ∴ ∠क = ∠ड.

(૬). ∠क = ∠ड; ∴ ∠अ = ∠ब. તેથી अपमड ને बपमक ઉપર એવડ વાળીએ તો બન્ને ભાગો એક મેક ઉપર બરાબર મળી જશે. ∴ ∠अपम = ∠बपम = ૧ કાટખુણો.

અથવા अम, बम સાંધો. હવે अडम, बकम Δઓમાં अड = कब, डम = मक, ∠ड = ∠क; ∴ अम = बम; ∴ अमब સમદ્વિબાજુ Δમાં म શિરોબિંદુને अब પાયાના प મધ્યબિંદુ સાથે સાંધ્યું છે; ∴ पम ⊥ अब છે.

(૭). अबकड ચતુષ્કોણમાં ∠अ = ∠क, ∠ब = ∠ड છે. હવે अबकडના ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड = ચાર ∟ છે; અને ∠अ = ∠क, ∠ब = ∠ड; ∴ ∠अ + ∠ब = ૨ ∟ = ∠क + ∠ड; ∴ अड ∥ बक; એજ પ્રમાણે अड ∥ बक છે. ∴ अबकड ∥ કોણ છે.

(૮). अब ∥ डक છે; ∴ ∠अबड = ∠बडक. ∴ अबड, बडक Δઓમાં अब = डक, बड સામાન્ય છે, અને ∠अबड = ∠बडक; ∴ આ Δઓ સર્વસમાન છે; ∴ ∠अडब = ∠डबक; ∴ अड ∥ बक છે, ∴ अबकड ∥ કોણ છે.

(૯). अबड, डकब Δઓમાં अब = डक, अड = बक, અને बड સામાન્ય છે; ∴ ∠अबड = ∠बडक; અને ∠अडब = ∠डबक; ∴ अब ∥ डक; અને अड ∥ बक છે; ∴ अबकड ∥ કોણ છે

(૧૦). अक, बड કર્ણો મમાં દુભાગે છે. હવે Δ अमड, Δ बमक માં अम = कम, बम = डम, ∠अमड = ∠बमक; ∴ આ Δઓ સર્વ-સમાન છે; ∴ ∠डअम = ∠बकम; ∴ अड ∥ बक; અને એજ પ્રમાણે अब ∥ डक. ∴ अबकड ∥ કોણ છે.

(૧૧). अब લીટી ઉપર अड, बक લંબ अब ની એકજ બાજુએ સરખી દોરી છે. डक સાંધો. હવે ∠डअब = ૧ ∟ = ∠अबक; ∴ अड ∥ बक. અને अड = बक; ∴ अड ∥ = बक; ∴ डक ∥ अब.

(૧૨). अबकड રોમ્બસના अक, बड કર્ણો म માં મળે છે. હવે अक બાજુ પર વિરૂદ્ધ બાજુએ બે સમદ્વિબાજુ Δ ઓ છે; ∴ बम, अक ને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે अम, बड ને કાટખુણે દુભાગે છે.

(૧૩). अबकड ‖ કોણમાં अक, बड કર્ણ સરખા છે, અને म માં અરસપરસ છેદે છે. હવે अडक, बकड △ ઓમાં अड = बक, अक = बड, डक સામાન્ય છે, ∴ ∠अडक = ∠बकड. પણ ∠अडक + ∠बकड = ૨ ⌊. ∴ ∠अडक = ૧ કાટ. = ∠बकड. ∴ अबकड ‖ કોણમાં ∠ड કાટખુણો છે; ∴ अबकड લંબચોરસ છે.

(૧૪). अबकड ‖ કોણમાં अड, बक નાં प, ल મધ્યબિંદુ છે. पल સાંધો. હવે अब ‖ = बक; ∴ पड ‖ = लक. ∴ पलकड ‖ કોણ છે. (પ્રશ્ન ૮) ∴ पल = डक.

(૧૫). अब ‖ = डक; ∴ पब ‖ = डम. ∴ पबमड ‖ કોણુ છે (પ્ર.૮)

(૧૬). अबकड ચતુષ્કોણમાં अक = बड અને अक, बड એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. હવે मअ = मब, ∴ ∠मअब = ∠मबअ. પણ ∠अमब = ૧ ⌊; ∴ ∠मअब = ½ ⌊. એજ પ્રમાણે ∠मअड = ½ ⌊. ∴ ∠डअब = ૧ ⌊. વળી अमब અને अमड △ઓમાં अम સામાન્ય છે, मब = मड, અને म આગળના ખુણા કાટખુણા છે; ∴ अड = अब. એજ પ્રમાણે अब = बक = कड = डअ. ∴ अबकड ચોરસ છે.

(૧૭) अक बड બે કર્ણો કાટખુણે દુભાગે છે. अबकड ચતુષ્કોણ પુરો કરો. હવે अमब, अमड △ઓમાં अम સામાન્ય છે, मब = मड, અને ∠अमब = ૧ ⌊ = ∠ अमड, ∴ अब = अड; એજ પ્રમાણે अड = डक = कब = बअ. ∴ अबकड રોમ્બસ છે. વળી अक = बड તો પ્રશ્ન ૧૬ પ્રમાણે अबकड ચોરસ છે.

(૧૮). अबकड સ૦ ચ૦ માં કર્ણો म માં છેદે છે. पमर કોઇ પણ લીટી अब, कड સુધી દોરી છે. ત્યારે अपम △ ≡ करम △. ∴ पम = मर.

(૧૯). बड કર્ણ ઉપર अइ, कट લંબ દોરી છે. ત્યારે अइड △ ≡ कटब △. ∴ अइ = कट.

(૨૦). अब ‖ इर અને अक ‖ लर દોરો. र ત્રિકોણમાં પડે તેમ દોરો. इर = अप (अब ઉપર) અને लर = अव (अक ઉપર) કાપો. ∴ ∠र = ∠अ, ∴ अपव △ ≡ रइल △ ∴ पव = इल છે. ∠व = ∠रलइ = ∠क. ∴ पव ‖ इल.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૩ મો.

(૧). अबक △ની अब બાજુના फ મધ્યબિંદુમાંથી कइ, बक || દોરી अक ને इમાં મળવા દો. अ માંથી बक કે फइ || मअल, દોરો. फइ, बक मअल ત્રણ સમાન્તર લીટીઓ अब ને છેદી अफ, फब એ સરખા ભાગ કરે છે; ∴ તેઓ अक ના પણ એ સરખા ભાગ કરે છે (પ્ર૦ સિ૦ ૨૩). ∴ अइ = इक. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુઓનું પણ છે.

(૨). अबक △ ની अब, अक બાજુના फ, इ મધ્યબિંદુ છે. फइ સાંધો. હવે फइ || बक ન હોય તો फड, बक સમાન્તર अक ને ड માં મળે એમ દોરો. હવે फड, बक || છે; ∴ પ્રશ્ન ૧ પ્રમાણે ड, अक નું મધ્યબિંદુ હોઈ શકે નહિ. ∴ फ માંથી बक || દોરેલી फड લીટી फइ સાથેજ મળી જવી જોઇએ. ∴ फइ, बक || છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુઓનું પણ છે.

(૩). अबक △માં ड, इ, फ બાજુનાં મધ્યબિંદુ છે. ∴ फइ || बक અને इड || अब છે (પ્રશ્ન ૨). હવે अब || इड, ∴ ∠अ = ∠डइक; અને फइ || बक, ∴ ∠अइफ = ∠क. ∴ अइफ, इडक △ઓમાં अइ = इक, ∠अ = ∠डइक, અને ∠अइफ = ∠क, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ फइ = डक અને ड, बकનું મધ્યબિંદુ છે; ∴ फइ, बक થી અર્ધી છે. એજ પ્રમાણે इड = $\frac{1}{2}$ अब, અને कड = $\frac{1}{2}$ अक છે.

(૪). પ્રશ્ન ૩માં જોયું છે કે △ अफइ ≡ △ इडक; એજ પ્રમાણે △ अफइ ≡ △ फबड, અને फइ || डक અને फड || इड; ∴ फइकड || કોણ છે. ∴ △ फइड ≡ △ कइड. ∴ △ अफइ ≡ △ बफड ≡ △ कडइ ≡ △ डइफ છે.

(૫). अबकड ચતુષ્કોણની બાજુનાં प, ल, र, म મધ્યબિંદુ છે. पल, लर, रम, मप, अक, बड સાંધો. હવે अबड △માં म, प બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ છે; ∴ मप || बड; એજ પ્રમાણે लर || बड; અને मर || अक || पल. ∴ पलरम || કોણ છે.

(૬). પ્રશ્ન ૫ની આકૃતિમાં मल, पर સાંધો. હવે पल, लर, रम, मप || કોણ છે; અને मल, पर, એ સ. ચ. ના કર્ણ છે. ∴ मल, पर સ. ચ. ના કર્ણ હોઇ અરસપરસ દુભાગે છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૪ મો.

(૧). अबकड લીટી ઉપર अइ, बफ, कल, डप લંબ સરખા દોરો. इफ, फल, लप સાંધો. ∵ इअ = ‖ फब, ∴ इफ ‖ अब; ∵ फब ‖ = लक, ∴ फल ‖ बक; ∴ इफ, फल, બન્ને ‖ अबक. ∴ इफल એકજ લીટી હોઇ अबकड ‖ છે. એજ પ્રમાણે इफलप ‖ अबकड છે.

(૨) अब ઉપર વિરૂદ્ધ બાજુએ अक, बड સરખા લંબ દોરો. कड સાંધી अबને मમાં મળવા દો. ∵ अमक, बमड △ઓમાં अक = बड, ∠अ = ∠ब, ∠क = ∠ड; ∴ अम = बम.

(૩). पम ‖ = यर; ∴ मय ‖ = पर (પ્ર. સિ. ૨૪). ∴ मयरप ‖ કોણની पय, मर કર્ણ અરસપરસ દુભાગે છે.

(૪). कड, बड બે આપેલી લીટીને डમાં મળવા દો. अ માંથી कड ‖ अप, અને बड ‖ अल दोरो, અને बड, कड ને प, लमां મળવા દો. पड = पब, बड ઉપર લો. बअ સાંધી લંબાવી कड ને क માં મળવા દો. હવે डबक △ માં पअ ‖ डक, અને प, बड નું મધ્યબિંદુ છે; ∴ अ, बक નું મધ્યબિંદુ છે. એજ પ્રમાણે ल, डक નું મધ્યબિંદુ છે, અને लअ ‖ डब; ∴ अ, कब નું મધ્યબિંદુ છે. ∴ बअ = अक.

આપેલી લીટીઓ સમાન્તર હોય તો પ્રશ્ન હમેશાં સત્ય નથી. પણ अ જો આપેલી લીટીઓથી સરખે અંતરે–સમાન્તર–રહેલી લીટીમાં હોય તો अ માં આપેલી સમાન્તર સુધી ગમે તે લીટી દોરીએ તો તે अ માં દુભાગાય છે.

(૫). अबकड ચતુષ્કોણમાં अब ‖ डक, અને अड = बक. હવે જો अब = डक ન હોય તો डक માંથી डइ = अब કાપો. આ પ્રમાણે ड આગળથી डइ = अब લેતાં डक ઉપર इ એકજ બિંદુમાં એ પ્રમાણે સરખો ભાગ કપાય છે. તે વખતે अब ‖ = डइ, ∴ अबइड ‖ કોણ છે. જ્યારે डक > अब હોય ત્યારે अबकड સમદ્વિ. ટ્રાપિ. છે એ પ્રત્યક્ષ છે.

૬. अबकड સ૦ ચ૦ માં प, र, ल, इ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ છે. હવે अब = डक; ∴ अप = અને ‖ डल; ∴ पल ‖ अड કે बक. તેજ પ્રમાણે इर ‖ अब કે डक છે.

(૭). अब = ‖ डक; ∴ मब = ‖ यड; ∴ मड = ‖ बय; ∴ मबयड સ૦ ચ૦ છે.

(૮). अबकड ચ૦ માં अक, बड સરખા હોઇ म માં દુભાગે છે. હવે अमड, बमक △ એમાં अम = मक; मड = मब, અને ∠अमड = ∠बमक; ∴ ∠अडम = ∠वबक; ∴ अड ∥ बक. એજ પ્રમાણે अब ∥ डक ∴ अबकड સ૦ ચ૦ છે. વળી अडक △, बकड △ માં अड = बक, अक = बड અને डक સામાન્ય છે; ∴ ∠ड = ∠क. પણ ∠ड + ∠क = ૨ ∟. ∴ ∠ड = ૧ ∟ = ∠क. ∴ अबकड લંબચોરસ છે.

(૯). अब, बक, कड, डअ નાં इ, फ, ग, प મધ્યબિંદુ છે. હવે मबरक સ૦ ચ૦ માં मर, बक દુભાગે છે; ∴ તેથી मर, फ માંથી જાય છે. તેમજ मल, ग માંથી જાય છે. ∴ मलर △ માં ग, मल નું અને फ, मर નું મધ્યબિંદુ છે; ∴ लर ∥ गफ અને लर = ૨ गफ. પણ बकड △માં गफ ∥ बड અને बड = ૨ गफ. ∴ लर ∥ અને = बड. એજ પ્રમાણે वय ∥ = बड. ∴ यव ∥ = लर. ∴ यवलर સ૦ ચ૦ છે અને તેની लर = बड, અને वल = अक. ∴ यवलर સ૦ ચ૦ એવો છે કે તેની બાજુઓ આપેલા સ૦ ચ૦ની કર્ણ બરાબર છે.

(૧૦). अबकड એવો સ૦ ચ૦ લો કે अब = अड ન હોય. જો अक ના મધ્યબિંદુ સિવાય બીજી કોઇ સ્થિતિમાં इ, अक માં હોય તો ધારો કે તે फ સ્થિતિમાં છે. ત્યારે △फइड, △ फइब માં फड = फब, इड = इब, અને फइ સામાન્ય છે; ∴ ∠अइड = ∠अइब. પણ अड = अब નથી; ∴ ∠अइड = ∠अइब નથી. માટે फ, इ ઉપરજ હોઇ શકે છે.

વળી अबकड સ૦ ચ૦ રોમ્બસ કે ચોરસ હોય તો अक નું કોઇપણ બિંદુ ब, ड થી સમાન અંતરે છે. अक ઉપર इ ગમે ત્યાં લો. इड, इब સાંધો. अक, बड,म માં છેદે છે. હવે इमड △, इमब △માં इम સામાન્ય છે, मड = मब, અને म આગળ કાટખુણા છે. ∴ △ઓ સર્વ સમાન છે; ∴ इड = इब.

(૧૧). अड ∥ बइ દોરી डक ને इ માં મળવા દો. હવે ∠अ = ∠ब, અને ∠ड = ∠क; ∴ ∠अ + ∠ड = ∠ब + ∠क. પણ ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड = ૪ ∟. ∴ ∠अ + ∠ड = ૨ ∟, ∴ अब ∥ डक. વળી अड ∥ बइ, ∴ ∠बइक = ∠ड. પણ ∠ड = ∠क; ∴ ∠बइक = ∠क. ∴ बइ = बक. પણ बइ = अड = बइ, ∴ अड = बक. ∴ अबकड સમદ્વિબાજુ ટ્રાપિઝયમ છે.

વળી ∠अ = ∠क અને ∠ब = ∠ड હોય તો ∠अ + ∠ड = ∠क + ∠ब = ∠अ + ∠ब = ∠ड + ∠क = ૨ ∟. ∴ अबकड સ૦ ચ૦ છે.

(૧૨). अबक △માં बक ⊥ દોરો. અને डइ થી अल ને અંતરે डइ ‖ લીટી फग ને ग માં છેદે તેમ દોરો. गप ⊥ डइ દોરો અને बल = पव, लक = पइ, डइ ઉપર લો. गवड △ પુરો કરો. હવે गपइ △, अलब △માં गप = अल, पव = लब, અને ∠प = १ ∟ = ∠ल; ∴ गपव △ ≡ △ अलब; એજ પ્રમાણે गपइ △ ≡ △ अलक છે. ∴ गवइ △ ≡ अबक △.

(૧૩). अबकड ચતુષ્કોણમાં अથી કોણઅંતર अब, अक, अक છે; અને बથી बअ, बड, बक છે. અને આ અંતરો સરખાં છે. ∴ अक = बड, अड = बक; એજ પ્રમાણે अब = डक છે. ∴ अबकड સ. ચ. છે. અને તેની કર્ણો अक, बड સમાન છે. ∴ अबकड લંબચોરસ છે.

(૧૪). अबकड સ. ચ. માં अक, बड, मમાં છેદે છે, અને म માંથી अब, डक સુધી पमल લીટી દોરી છે. હવે अपम △, कलम △માં अम = कम, ∠पअम = ∠लकम, ∠अपम = ∠कलम; ∴ △ अपम ≡ △ कलम છે. એજ પ્રમાણે △ बमप ≡ △ डमल, અને △ बमक ≡ △ अमड. ∴ આકૃતિ अपलड ≡ कलपव છે.

પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૫ મો.

(૧) फ, इ, अब, अकનાં મધ્યબિંદુ છે; ∴ फइ ‖ बक, અને फइ = ½ बक. વળી गबक △માં: ल, म, गब, गकનાં મધ્યબિંદુ છે; ∴ लम ‖ बक અને लम = ½ बक. ∴ फइ ‖ = लम છે. ∴ फइमल સ. ચ. છે. ∴ फम, लइ, गમાં દુભાગાય છે. ∴ गल = गइ = गब; અને गफ = गम = मक. ∴ गમાં बइ, कफ ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. ∴ ग સ્થિર બિંદુ છે. એજ પ્રમાણે अगड મધ્યગા અને बगइ મધ્યગા પણ गમાં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. ∴ ત્રણે મધ્યગાઓ એક બિંદુગામી છે.

(૨). अबकड ટ્રાપિઝ્યમની અસમાન્તર બાજુ अड, बकનાં फ, इ મધ્યબિંદુ છે. अड ‖ बल દોરી डकને लમાં મળવા દો. बलને पમાં દુભાગો. હવે बलक △માં. पइ ‖ लक; અને अल સ. ચ. માં फप ‖ डल એટલે पમાંથી पइ, पफ બે લીટીઓ डलक ‖ છે. ∴ फपइ એકજ લીટી હોઇ डक ‖ કે, अब ‖ છે.

(૩). अबक △ માં बइ, कफ મધ્યગાઓ સરખી છે, અને ग માં છેદે છે. હવે बइ = कफ. પણ कग = ⅔ कफ અને बग = ⅔ बइ;

∴ बग = वग. ∴ ∠गबक = ∠गव.ब. ∴ बकफ △ बकइ △માં बक સામાન્ય છે, बइ = कफ, અને ∠बकफ = ∠क.बइ, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠कबफ = ∠बकइ. ∴ अक = अब.

(૪) अबक △ માં अड, बइ, कफ મધ્યગાઓ સરખી છે. अड = बइ; ∴ अक = बक (પ્રશ્ન ૩). અને बइ = कफ, ∴ अब = अक. ∴ अब = बक = कअ.

(૫). अबक △ માં ∠अकड = ∠अ કરો અને ∠अकब = ૧ ∟ = ∠अ + ∠ब. ∴ ∠बकड = ∠कबड. ∵ ∠अ = ∠अकड, ∴ डक = डअ, અને ∠डकब = ∠ब, डक = डब. ∴ अब ના મધ્યબિંદુ ड ને क જોડે સાંધનારી લીટી अब થી અર્ધી છે.

(૬). कड ને फ માં દુભાગી इफ સાંધો. ∵ ∠डइक = ૧ ∟, ∴ इफ = ½ डक (પ્રશ્ન ૫). ∴ इफ = ½ अब. પણ इफ = बक, ∵ इ, फ મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી ∥ बक કે अड. ∴ अब = २ बक = २ अड.

(૭). अबड △ માં इ, फ બાજુનાં મધ્યબિંદુને સાંધનારી फइ લીટી ∥ बड. વળી अक સાંધો અને कइ, बड ને ल માં, कफ, बड ને र માં અને अक, बड ને म માં મળવા દો. હવે अबक △ માં कड, बम મધ્યગા છે, ∴ ल માં बम ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. ∴ बम = ३ लम. એજ પ્રમાણે डम = ३ रम. પણ बम = डम. ∴ बम = ३ रम. ∴ बल = २ लम = २ रम = रल = डर. ∴ बड, र, ल માં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે.

(૮). अबकड ચતુષ્કોણમાં इ, फ, ग, ल બાજુનાં મધ્યબિંદુ છે. અને म, व, अक, बड કર્ણનાં મધ્યબિંદુ છે. ત્યારે मव, इग, અને मव, लफ અરસ પરસ દુભાગાશે. मइ, इव, वग, गम સાંધો. હવે इ, अब નું, मअक નું મધ્યબિંદુ છે. ∴ मइ ∥ कब. તેજ પ્રમાણે गव ∥ कब. ∴ मइ ∥ गव. એજ પ્રમાણે मग ∥ इव. ∴ इवगम સ૦ ચ૦ છે. ∴ તેના કર્ણ इग, मव અરસપરસ દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે लम, लव, फव, फम સાંધવાથી लमफव સ૦ ચ૦ છે અને તેના કર્ણ लफ, मव દુભાગાય છે.

(૯). अबकड રોમ્બસમાં इ, फ, ल, र બાજુનાં મધ્યબિંદુ છે. इफलर સાંધો. बड, अक સાંધો. રોમ્બસના કર્ણો बड, अक કાટખુણે દુભાગે છે. વળી अबड △માં र, इ બાજુનાં મધ્યબિંદુ છે, ∴ रइ ∥ बड; એમજ लफ ∥ बड; અને इफ ∥ अक ∥ रल. ∴ इफलर સ. ચ. છે. અને अक, बड કાટખુણે મળે છે, ∴ તેઓની સમાન્તર લીટીઓ પણ કાટખુણે મળે છે, ∴ रइ ⊥ इफ. ∴ इफलर લંબચોરસ છે.

ખંડ ૩ જો. સિદ્ધ ભાગ; કૃત્ય ભાગ.

§ ૨૦ દ્વિભાગ અને લંબ રચના.

કૃત્ય ૧ લું.

(૧). કૃત્ય ૧ની આકૃતિને अफ ઉપર બેવડ વાળીએ તો ∠बअफ = ∠कअफ, ∴ अब,अक ઉપર બરાબર પડશે અને अड = अइ ∴ डफ, इफ ઉપર પડશે અને તેથી अफ ની ઉપરના ભાગ નીચેના ભાગ ઉપર બરાબર સમાઈ જશે. ∴ આખી આકૃતિ अफ ની આસપાસ સમ્મિતરૂપ છે.

(૨). फ ને ∠अ ની બહાર પડવા દો. ત્યારે फअ સાંધી फ′ સુધી લંબાવો. હવે फअड △ ≡ फअइ △માં, ∵ फअ સામાન્ય છે, अड = अइ, फड = फइ. ∴∠फअड = ∠फअइ પણ फअफ′ સીધીલીટી છે ∴ ∠फअड, ∠डअफ′ ન્યૂનતાપૂરક, અને ∠फअइ, ∠इअफ′ ન્યૂનતાપૂરક છે ∴ સરખા ∠फअड, ∠फअइ ના ન્યૂનતાપૂરક ∠डअफ′, ∠इअफ′ પણ સરખા છે. ∴ अफ′ ∠बअक ને દુભાગે છે.

(૩). ∵ △ अडफ ≡ △अइफ, ∴ ∠अफड પણ = ∠अफइ; ∴ डफइ પણ अफ થી દુભાગાય છે.

(૪). ∠अबक ને बफ થી કૃ. સિ. ૧ પ્રમાણે દુભાગો बअ = बक ત્રિજ્યાથી ब મધ્યબિંદુ લઇ વર્તુળ દોરી बफ ને ड માં છેદો. अ, ड, फ મધ્યબિંદુ લઇ સરખી ત્રિજ્યાઓ લઇ ત્રણ વર્તુળો દોરો; બબ્બે વર્તુળો इ, ल માં છેદે છે. अइ, डइ, कल, डल, अफ, कफ સાંધો ત્યારે △ अबफ ≡ △ कबफ; ∴ बफ, ∠अबकને દુભાગે છે. વળી △ अबइ ≡ △ डबइ; અને △ कबल ≡ △ डबल; ∴ बइ, ∠अबफ ને, અને बल, ∠कबफ ને દુભાગે છે.

(૫). ∠बअक પ્રોટ્રેક્ટરથી ૮૫° નો કરો અને ∠कबड = ૪૨½° પ્રોટ્રેક્ટરથી કરો ∠अबड માપી જુઓ. આ ખૂણો ૪૨½° નો છે. વળી ∠अबक ને કૃ૦ સિ૦ ૧ ની રચનાથી પ્રોટ્રેક્ટર વિના દુભાગો. જુઓ કે बड, પ્રોટ્રેક્ટરથી મેળવેલી बड સાથે બરાબર મળી જાય છે આકૃતિ સફાઇદાર ચોક્કસ દોરી હોય તો બન્ને વખતે बड એકજ આવશે.

(૬). बक ઉપર बकअ સમબાજુ △ બનાવો. ∠ब + ∠क + ∠अ

= ૧૮૦° છે; અને ∵ ∠ब = ∠क = ∠अ; ∴ ∠बअक, ૬૦° નો છે. ∠बअक ને अल थी દુભાગો. ∴ ∠बअल = ∠कअल = ૩૦° છે. વળી ∠बअल ને अर થી દુભાગો. ∴ ∠बअर = ∠लअर ૧૫° છે. વળી कअ ને ड માં દુભાગો અને डप ⊥ अक, દોરો; અને डप = अड = डक કરો. ત્યારે डअ = डप, डप = डक, ∴ ∠अपड = ∠पअड + ∠पकड. ∴ ∠अपड = ૯૦° છે; અને अपक △ સમદ્વિબાજુ છે, ∴ ∠पअक = ∠पकड = ૪૫°. ∴ ∠पअल = ૪૫° + ૩૦° = ૭૫° છે.

(૭). ∠कअब = ૧ ∟ = ૯૦° લો. अब ગમે તેવડી કાપો. अब ઉપર કાટખૂણાની બાજુ તરફ એક સમબાજુ अबइ △ કરો. હવે अबइ સમબાજુ △ છે, ∴ ∠इअब = ૬૦°; અને ∠कअब = ૯૦°; ∴ બાકીનો ∠कअइ = ૯૦° − ૬૦° = ૩૦°; ∴ ∠कअइ, એક કાટખૂણાનો ત્રીજો ભાગ છે.

નોટ—કાટખૂણા સિવાયના ગમે તે ખુણાના ત્રણ ભાગ ભૂમિતિની શાસ્ત્રીય રીતે શક્ય નથી.

(૮). પ્રશ્ન ૭ માં ∠इअब = ૬૦° છે; એને अल થી દુભાગો. ત્યારે ∠इअल = ૩૦° છે. अब ને ड માં દુભાગી डफ ⊥ अब દોરી डफ = अड = डब કરો, ને अब, बफ સાંધો. ત્યારે પ્રશ્ન ૬ પ્રમાણે △ अफब સમદ્વિબાજુ કાટખુણ છે; ∴ ∠फअब = ૪૫° છે; અને ∠डअल = ૩૦° છે; ∴ ∠लअफ ૧૫° છે.

(૯). अफ માં फ કોઇ પણ બિંદુ લો; फइ ⊥ अब, फल ⊥ अक દોરો. હવે अफइ △, अफल △ માં अफ સામાન્ય છે, ∠अइफ = ૧ ∟ = ∠अलफ, અને ∠इअफ = ∠लअफ, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે: ∴ फइ = फल.

(૧૦). अफ, डइ, ममां મળે છે. હવે डइनी વિરૂદ્ધ બાજુ ઉપર બે સમદ્વિબાજુ △ઓ છે; ∴ ∠डअम = ∠इअम. વળી ∠अडम = ∠अइम. હવે अडम △, अइम △માં अम સામાન્ય છે; અને ∠डअम = ∠इअम, ∠अडम = ∠अइम; ∴ આ △ઓ સર્વસમાન છે; ∴ डम = मइ; અને ∠डमअ = પાસેનો ∠इमअ ∴ डइ, अफ કાટખૂણે મળે છે.

(૧૧). કૃ. સિ. ૧ ની રચના પ્રમાણે ∠ब, ∠कने बम, कम થી દુભાગો. मअ સાંધો. મમાંથી बक ⊥ मड, कअ ⊥ मइ, અને अब ⊥ मफ દોરો. હવે मबड △, मबफ △માં बम સામાન્ય છે, ∠मबड = ∠मबफ, ∠ड = ∠फ; ∴ मड = मफ. એજ પ્રમાણે मड = मइ. ∴ मफ = मइ.

વળી मफअ △, मडअ △માં मफ = मइ, मअ કર્ણ સામાન્ય છે, અને ∠फ = ૧ |_ = ∠इ; ∴ ∠मअफ = ∠मअइ. ∴ मअ, ∠बअकને દુભાગે છે. ∴ ત્રિકોણની અંદરના ત્રણે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુગામી છે. આ બિંદુ ને મધ્યબિંદુ લઈ અને मड ત્રિજ્યા લઇ દોરેલો વર્તુળ △ની બાજુઓને અંદરથી સ્પર્શ કરે છે.

(૧૨). ब, क આગળના બહારના ખુણાઓને बम, कम થી દુભાગો. मअ સાંધો. ममांथी व ⊥ मड, अक ⊥ मइ, अब ⊥ मफ દોરો. પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે △ मबड ≡ △ मबफ; અને △ मकड ≡ △ मकइ; ∴ मफ = मड = मइ, અને પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે △ मफअ ≡ △ मइअ; ∴ मअ, ∠अ ને દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે ब, क, આગળના ખુણાઓને માટે પણ સમજવું. માટે ત્રિકોણની અંદરનો એક ખુણો અને બીજા ખુણાની પાસેના બહારના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુગામી છે. આ બિંદુ ને મધ્યબિંદુ લઈ અને मड ત્રિજ્યાથી દોરેલો વર્તુળ बकને અને अब, अकને લંબાવતાં સ્પર્શ કરે છે. ત્રિકોણના આવા ઉપલગ્ન વર્તુળ ત્રણ છે.

(૧૩). પ્રશ્ન ૧૨ પ્રમાણે કરો. ∠ब ને અંદરથી અને ∠अ, ∠क બહારનાને દુભાગો અને ∠क ને અંદરથી અને ∠ब, ∠अ બહારનાને દુભાગો. આ દુભાગનારી લીટીઓ ल, रમાં મળે તો ल, र બીજા ઉપલગ્ન વર્તુળોનાં મધ્યબિંદુ છે.

કૃત્ય ૨ જું.

(૧). વળી अकड △ ≡ बकड △; ∴ આકૃતિને कड ઉપર બેવડ વાળીએ તો अकड ભાગ ઉપર बकड ભાગ બરાબર મળી જશે. તેમજ अकब △ ≡ अडब △; ∴ ફરીથી આકૃતિને अब ઉપર બેવડ વાળીએ તો अकब ભાગ अडब ભાગ ઉપર બરાબર મળી જશે તેથી આખી આકૃતિ कड ની આસપાસ તેમજ अब ની આસપાસ સમ્મિનરૂપ છે.

(૨). જુઓ પ્રશ્ન ૧ ની સિદ્ધતા.

(૩). अब ના બે સરખા ભાગ अइ, इब કૃ૦ સિ૦ ૨ પ્રમાણે કરો. अइ, इब દરેકના બે બે સરખા ભાગ એજ પ્રમાણે કરો. એટલે अबના ચાર સરખા ભાગ થયા છે. વળી આ દરેક ભાગના બબ્બે સરખા ભાગ કૃ૦ સિ૦ ૨ પ્રમાણે કરો એટલે अब ના આઠ સરખા ભાગ થયા છે.

(૪). कड માં કોઇપણ બિંદુ प લો पअ, पब સાંધો હવે अकइ $\triangle \equiv$ बकइ $\triangle$; $\therefore$ $\angle$अइक = $\angle$बइक = ૧ $\lfloor$. (ક્રૂ૦ સિ૦ ૨ની સિદ્ધતા). વળી पअइ $\triangle$, पबइ $\triangle$માં पइ સામાન્ય છે, अइ = बइ, અને $\angle$अइप = $\angle$बइप; $\therefore$ આ $\triangle$ઓ સર્વસમાન છે. $\therefore$पअ = पब.

(૫). म મધ્યબિંદુના अबक વર્તુળમાં अब જ્યા લો अब ને ड માં દુભાગો. मअ, मड, मब સાંધો. હવે मअड $\triangle$, मबड $\triangle$માં मअ = मब, अड = बड, અને मड સામાન્ય છે; $\therefore$ $\triangle$ઓ સર્વસમાન છે. $\therefore$ $\angle$अडम = $\angle$बडम. $\therefore$ આ દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે. $\therefore$ मड, अब ને કાટખૂણે દુભાગે છે.

(૬). अ, ब એ બિંદુ અને कडफ કોઇ પણ લીટી લો. પ્રશ્ન ૪ થામાં આપણે જોયું છે કે अबને દુભાગનારી લીટીનું કોઈ પણ બિંદુ अ, बથી સમાન અંતરે છે. अब સાંધો. अबને इમાં દુભાગો. अब$\perp$इड દોરો અને આ લંબ લીટીને આપેલી कडफને डમાં મળવા દો. હવે इडનું કોઇ પણ બિંદુ अ, बથી સમાન અંતરે છે, $\therefore$ ड, જે આપેલી कडफમાં છે તે अ, ब એ આપેલાં બિંદુથી સમાન અંતરે છે. વળી

अबને આપેલી લીટી લંબ હોય તો अब$\perp$इड દોરેલી अबને ન મળતાં अब $\parallel$ થાય છે. $\therefore$ આ વખતે કૃત્ય અશક્ય છે.

(૭). अब, अक એ આપેલી લીટી अમાં મળે તેમ લો. અને पडल બીજી કોઇ પણ લીટી લો. $\angle$बअकને अडથી દુભાગો; અને આ દુભાગનારી લીટીને पल ને डમાં મળવા દો. डમાંથી अब अक ઉપર डब, डक લંબ દોરો. હવે अबड $\triangle$ अकड $\triangle$માં अड કર્ણ સામાન્ય છે, $\angle$अबड = ૧ $\lfloor$ = $\angle$अकड, અને $\angle$बअड = $\angle$कअड, $\therefore$ $\triangle$ઓ સર્વસમાન છે; $\therefore$ डब = डक. $\therefore$ ड, જે આપેલી पल લીટી ઉપર છે તે આપેલી अब, अकથી સમાન અંતરે છે. વળી

$\angle$बअकને દુભાગનારી अड લીટી આપેલી पल લીટીને $\parallel$ હોય તો ड બિંદુ અશક્ય છે. વળી જ્યારે अब, अक સમાન્તર હોય ત્યારે તેઓની વચ્ચે સમાન અંતરે રહેતી લીટી સાથે पल મળી જાય ત્યારે पलનું કોઇ પણ બિંદુ अब, अक સમાન અંતરે છે. વળી

अब, कड સમાન્તર હોય અને पल, સમાન્તર ન હોય તો पलને अब, कडને ग,लમાં મળવા દો. गलને रમાં દુભાગો. रમાંથી अब $\perp$ रब, कड$\perp$रड દોરો. હવે $\triangle$गरब $\equiv$ $\triangle$ डरल; $\therefore$ रब = रड. $\therefore$ र બિંદુ જે पलમાં છે તે આપેલી अब, कडથી સમાન અંતરે છે.

(૮). अब લો. अब લંબાવી बक = बअ કરો. ત્યારે अक = ૨ अब છે. बक લંબાવી कड = अब કરો. ત્યારે अड = ૩ अब છે. अड़ લંબાવી डइ = कब કરો. ત્યારે अइ = ૫ अब છે.

(૯). ∠अ ને अड થી દુભાગી बक પાયાને ड માં મળવાદો. હવે अब = अक, ∴ ∠ब = ∠क વળી अडब △, अडक △ માં अब = अक, ∠ब = ∠क, ∠बअड = ∠कअड, ∴ △ ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बड = कड, અને ∠अडब = ∠अडक, = ૧ ∟. ∴ अड, बक ને કાટખૂણે દુભાગે છે.

(૧૦). ∠इकब = ૯૦° છે. વળી ∠अकड़, ∠बकड पासे પાસેના ખૂણા છે; ∴ તેઓને દુભાગનારી कइ, कफ કાટખૂણે મળે છે. ∴ ∠इकफ = ૧ કાટખુણો.

(૧૧). अक સિવાયની કોઇ પણ ત્રિજ્યા લઇ એવી આકૃતિ (સિ. ૨ ની) દોરો; અને એ પ્રમાણેજ સિદ્ધ કરો.

(૧૨). अ, ब મધ્યબિંદુ લઇ ગમે તે એકજ ત્રિજ્યાથી બે વર્તુળો क માં છેદે તેમ દોરો. વળી अ, ब મધ્યબિંદુ લઇ ગમે તે अक સિવાયની ગમે તે એકજ ત્રિજ્યા લઇ બે વર્તુળો ड માં છેદે તેમ દોરો अक, बक, अड, बड, સાંધો. ત્યારે कड, अब ને इ માં દુભાગશે. હવે अकड △, बकड △ માં अक = बक, अड = बड, ने कड સામાન્ય છે; ∴ ∠अकड = ∠बकड. વળી अकइ △, बकइ △ માં अक = बक, कइ સામાન્ય છે, અને ∠अकइ = ∠बकइ; ∴ अइ = बइ. ∴ अब, इ માં દુભાગાય છે.

(૧૩). अ, ब મધ્યબિંદુ લઇ अब ત્રિજ્યાથી બે વર્તુળો क માં છેદે તેમ દોરો. ∴ अबक સમબાજુ △ છે. ∠अकब ને कडથી દુભાગી अब ને ड માં મળવાદો. હવે अक = बक, ∴ ∠अ = ∠ब; અને अकड △, बकड △માં अक = बक, ∠अ = ∠ब, અને ∠अकड = ∠बकड; ∴ अड = बड. એજ પ્રેમાણે જો अब ઉપર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરી તેના શિરોબિંદુ ખુણાને દુભાગીએ તો આ દુભાગનારી લીટી अब ને કાટખુણે દુભાગે છે.

કૃત્ય ૩ જું.

(૧). अबक △માં अब = अक છે. बक પર बमांथी बड ⊥ દોરી कअने डમાં મળવા દો. હવે ∠डबक = ૧ ∟ ∴ ∠ड + ∠क = ૧ ∟ છે.

પણ ∠क = ∠अबक અને ∠अबक + ∠अबड = ૧ ⌊. ∴ ∠ड=∠अबड. ∴ अड = अब = अक. ∴ कड = २ अब = अक. बक પાયો કાયમ છે. અને बड ⊥ बक છે.

(૩). માપ લેતાં अक = बड થાય છે.

(૪). अब = ૩.૫″ લો. अड = .૭″ = बक કાપો. डમાંથી અને कમાંથી अब ઉપર કાટખુણે હોય એમ લીટી દોરો. ઉપર બે લંબ અને નીચે બે લંબ મળી ચાર લંબ દોરી શકાય છે. ખરૂં જોતાં ड આગળના ઉપર નીચેના બે લંબ એકજ લીટી છે; તેમ क આગળના ઉપર નીચેના બે લંબ એકજ લીટી છે.

(૫). માપ લેતાં ∠अकम = ૯૦° = ૧ ⌊ = ∠बकम થાય છે. अकम △ ≡ बकम △ પણ છે. તે ઉપરથી પણ ∠अकम = ૧ ⌊ = ∠बकम છે.

(૬). अकम △, बकम △માં अक = बक, कम સામાન્ય છે, અને ∠अ = ૧ ⌊ = ∠ब; ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ ∠अकम = ∠बकम ∴ कम, ∠अकबને દુભાગે છે.

(૭). डक સાંધો. હવે △ डकपમાં डप = डक. ∴ ∠डपक=∠डकप; તેમજ △ डरकમાં डर = डक, ∴ ∠डकर = ∠डरक; ∴ ∠प + ∠र = ∠पकर. ∴ ∠पकर ૧ કાટખુણો છે; ∴ कप ⊥ अब છે.

નોટ. કોઇપણ લીટીના આપેલા બિંદુમાંથી તેના ઉપર લંબ દોરવાની આ એક રીત છે.

(૮). अक, अड, फड, कइ, इड, अइ સાંધો. હવે अडफ △, अकड △, कइड △ દરેક સમબાજુ છે; ∴ ∠कअड = ∠डअफ = ⅔ કાટખૂણો. અને अकइड રોમ્બસ છે; ∴ इअड = ½ × ⅔ કાટખૂણો = ⅓ કાટખુણો. ∴ ∠इअफ = ⅓ કાટખુણો + ⅔ કાટખૂણો = ૧ ⌊. ∴ इअ ⊥ अब છે.

(૯). જુઓ કૃત્ય સિદ્ધાંત ૧ ઉપરના ૮ અને ૬ પ્રશ્નો.

(૧૦). △ कपइ ≡ △ डपइ; ∴ पइ લીટી ઉપર આકૃતિ સમ્મિતરૂપ છે.

(૧૧). अबक △ની બાજુનાં ड,इ,फ મધ્યબિંદુ છે इ,फ માં कअ, अब ઉપર લંબ દોરો આ લંબ જો म માં મળે તો मड સાંધો હવે अफम △, बफम △માં अफ = बफ, फम સામાન્ય છે, અને फ આગળના ખુણા કાટખુણા છે, ∴ अम = बम એજ પ્રમાણે अम = कम. ∴ बम = कम. વળી बमड △. कमड △માં बम = कम, डम સામાન્ય છે, અને बड = कड; ∴ △ઓ સર્વસમાન છે; ∴ ∠बडम = ∠कडम = ૧ ⌊, ∴ ત્રિકોણુની બાજુનાં મધ્યબિંદુમાંથી તેજ બાજુ ઉપર દોરેલા લંબ એક

બિંદુગામી છે. વળી मअ = मब = मक; ∴ મધ્યબિંદુ લઈ मअ ત્રિજ્યાથી દોરેલો વર્તુળ ત્રિકોણનાં अ,ब,क શિરોબિંદુમાંથી જશે. એ વર્તુળ પરિલગ્ન વર્તુળ કહેવાય છે.

કૃત્ય ૪ થું.

(૧). આકૃતિમાં अइफ △ ≡ अडफ △. ∴ આકૃતિને अफ ઉપર બેવડ વાળીએ તો એક ભાગ બીજા ઉપર બરાબર મળી જાય છે. ∴ अफ આકૃતિની સમ્મિતરૂપ ધરી છે. વળી बफ અને इफ ત્રિજ્યા પણ अब કે अइ ના જેવડી લીધી હોય તો अइड △ ≡ फइड △ છે. તેથી इड પણ આકૃતિની સમ્મિતરૂપ ધરી છે.

(૨). अबक એક સાંકડ ખૂણુ ત્રિકોણ લો. अ માંથી बक ⊥ अड, ब માંથી कअ ⊥ बइ અને क માંથી अब ⊥ कफ દોરો. આકૃતિમાં ચોક્કશ સફાઇદાર લીટીઓ રાખશો તો △ ની અંદર આ ત્રણ લંબ, अड, बइ, कफ, ल બિંદુમાં મળશે.

(૩). अबक △ માં ∠ब = ૧ ⌊. લો. अब ⊥ बक છે. ब માંથી अक ⊥ बड દોરો. કાટખુણ ત્રિકોણમાં ત્રણે લંબ કાટખૂણ શિરોબિંદુમાંજ મળે છે.

अबक △ માં ∠अ પહોળો ખૂણો છે. अ માંથી बक ⊥ अड દોરો. અને ब માંથી कअ ⊥ बफ અને क માંથી बअ ⊥ कइ દોરો. डअ, बफ, कइ ત્રણે લંબને લંબાવવાથી એકજ ल બિંદુમાં ત્રિકોણની બહાર મળશે.

નોટ—પ્રશ્ન ૨ અને ૩ ઉપરથી માલમ પડશે કોઇ પણ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામેની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ એક બિંદુગામી છે.

(૪). डफ સાંધો. डइफ △ માં फइ = फड, ∴ ∠इ = ∠फडइ; અને डफक △ માં फड = फक; ∴ ∠क = ∠फडक; ∴ ∠इडक = ∠इ + ∠क. ∴ ∠इडक એક કાટખુણો છે. ∴ इड ⊥ अब છે.

(૫). डक, डप, इक, इप, कप સાંધો. હવે △ डकइ ≡ △ डपइ. ∴ ∠कडइ = ∠पडइ. ∴ △ डकल ≡ △ डपल (कप, अब, ल માં છેદે છે). ∴ कप ⊥ अब છે.

(૬). ∠बअक ને बड થી દુભાગી बड નાં ड માંથી बअ, बक ઉપર डअ, डक લંબ દોરો. હવે △बडअ, △बडकમાં बड કર્ણ સામાન્ય

છે, ∠अ = ૧ ∟ = ∠क, અને ∠अबड = ∠कबड. ∴ डअ = डक છે

(૭). કાટખુણો લેતાં ઉપર પ્રમાણેનીજ સિદ્ધતા છે. અને પહોળો ખુણો લેતાં પણ એવીજ સિદ્ધતા છે.

(૮). म મધ્યબિંદુના વર્તુળમાં अब જ્યા લો· अबને डમાં દુભાગો. मक સાંધો. मअ, मब સાંધો. હવે मडअ △ = मडब △; ∴ ∠मडअ = ∠मडब = ૧ ∟ ∴ વર્તુળના મધ્યબિંદુમાંથી કોઇ પણ જ્યા ઉપર દોરેલો લંબ તે જ્યાને દુભાગે છે.

(૯). अबक △માં अक⊥बइ, અને अब⊥कफ દોરો. આ લંબ लમાં મળે છે. लમાંથી बक⊥लड દોરો. लड લંબાવીએ તો તે બરાબર સામેના શિરોબિંદુ अમાંથી જશે.

---

§ ૨૧ ત્રિકોણ અને કોણ રચના.

કૃત્ય ૫ મું.

(૧). એક अबक મોટો ત્રિકોણ લો. डफ એક મોટી લીટી લો. डफમાંથી डइને अब બરાબર કાપો. ड મધ્યબિંદુ લઇ बक ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દોરો. અને इ મધ્યબિંદુ લઈ अक ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો मમાં છેદે છે. मड, मइ સાંધો. ત્યારે मडइ △ = कबअ△ છે.

(૨). ૬·૨″ = अब લો. ब મધ્યબિંદુ લઇ ૪·૪″ની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દોરો અને क મધ્યબિંદુ લઇ ૩·૧″થી એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો જો कમાં છેદે તો कअ, कब સાંધો. ત્યારે अबक △માં अब = ૬·૨″, बक = ૪·૪″, कअ = ૩·૧″ છે.

(૩). अब = ૪·૩″ લો. અને अ,ब મધ્યબિંદુઓ લઇ अब, बअ ત્રિજ્યાથી ब વર્તુળો कમાં છેદે તેમ દોરો. ત્યારે अबक △ સમબાજુ છે. ∠अ, ∠ब, ∠कને अड, बइ, कफથી દુભાગો (કૃ. સિદ્ધાંત ૧ પ્રમાણે) આ દરેક પેટા ખુણો પ્રોટ્રેક્ટરથી માપો તો તે ⅓ કાટખુણો કે ૩૦° છે.

(૪). ૩·૫ સે. મી. ની अब લો. अ, ब મધ્યબિંદુઓ લઇ ૫·૩ સે. મી.ની ત્રિજ્યાથી બે વર્તુળો कમાં છેદે તેમ દોરો. कअ, कब સાંધો. ત્યારે अबक △માં कअ = ૫·૩ સે. મી. અને कब = ૫·૩ સે. મી. છે. તેથી अबक માગેલો △ છે.

(૫). अबक એક સમબાજુ ત્રિકોણ બનાવો बक પાયો છે. સમબાજુ △ના બધા ખુણા સરખા છે, ∴ દરેક ખુણો ૬૦° નો છે. માટે अबक પહેલી જાતનો ત્રિકોણ છે. ∠बअकને अपથી દુભાગો. તેથી ∠बअप = ૩૦° છે,कअને ड સુધી લંબાવી डब સાંધો. ∠बअक = ૬૦°, ∴ ∠डअब = ૧૮૦° − ૬૦° = ૧૨૦°. ∴ △ अबड બીજી જાતનો ત્રિકોણ છે. અને अप જો बकને पમાં મળે તો △बअप ત્રીજી જાતનો △ છે.

(૬). કૃત્ય ૧ પ્રમાણે ત્રણે ત્રિકોણના ખુણા દુભાગો.

(૭). કોઇ પણ △માં બે બાજુ મળી ત્રીજીની બરાબર કે ત્રીજીથી ઓછી હોય તો ત્રિકોણ અશક્ય છે. અને પ્રશ્નમાં ૩.૬" > ૨.૫" + ૧.૦"; ∴ આ ત્રણ બાજુવાળો ત્રિકોણ બની શકે નહિ.

(૮). अब આપેલો પાયો, અને અ આપેલી બાજુ છે. अ. ब મધ્યબિંદુ લઇ અ ત્રિજ્યાથી બે વર્તુળ क માં છેદે તેમ દોરો. ત્યારે अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૯). પ્રશ્ન ૮ પ્રમાણેજ કરો. પરંતુ અ ત્રિજ્યાને બદલે પાયાથી બમણી હોય.

(૧૦). ક આપેલી પરિમિતિ છે, અને अब આપેલો પાયો છે. क માંથી अब બરાબર એક ભાગ કાપી લો. બાકીના ભાગનું અર્ધું કરો. આ અર્ધા ભાગને ત્રિજ્યા લઇ પ્રશ્ન ૮ પ્રમાણે કરો.

(૧૧). પ્રશ્ન ૮ પ્રમાણેજ કરો, પણ ત્રિજ્યા પાયાના જેવડી લો.

(૧૨). પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે એકજ કર્ણને પાયા તરીકે લઈ બે સમબાજુ ત્રિકોણો વિરૂદ્ધ બાજુએ દોરો

(૧૩). આપેલા अब પાયા ઉપર સમબાજુ ત્રિકોણ अबम કાઢો. એવા ૭ સમબાજુ ત્રિકોણો પાસે પાસે મુકોઃ—अम, बम, લંબાવી मड, मइ, દરેક अब જેવડી કાપો. मअ, मब, मड, मइ ઉપર સમબાજુ ત્રિકોણો દોરો. આ પ્રમાણે अबकडइफ સમષટ્કોણ થાય છે.

કૃત્ય ૬ ઠું.

(૩). अब કોઇ પણ લીટી લો. अ માંથી अब ઉપર अक ⊥ દોરો. अब = अक કાપો. कब સાંધો. હવે अबक △ માં अब = अक; ∴ ∠ब = ∠अकब; અને ∠कअब = ૧ ∟. ∴ ∠अकब = ½ ∟ = ∠अबक. ∴ अबक સમદ્વિબાજુ કાટખૂણ △ अब બાજુ ઉપર છે. વળી डअब

કોઇપણ લીટી લો. डब ને अ માં દુભાગો અને अब ⊥ अक દોરી अड = अक = अब કાપો. कड, कब સાંધો. હવે कडब △ માં कअ = डअ = अब, ∴ ∠ड = ∠अकड અને ∠ब = ∠अकब; ∴ ∠डकब = ૧ ∠ છે. વળી ∠ड = ૯૦° − ∠अकड = ∠अकब = ∠ब. ∴ डकब સમદ્વિબાજુ કાટખૂણ △ डब કર્ણ ઉપર છે.

(૪). કૃ૦ સિ૦ ૬ પ્રમાણે ∠बकड = ∠अबक બનાવી बअ, कड ને म માં મળવાદો. હવે अबक △ માં ∠ब = ∠क, ∴ मबक △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૫). डइ લીટી લઇ તેના ड આગળ ∠ब = ∠ड બનાવો અને તેના इ આગળ ∠डइफ = ∠क બનાવો. डइफ △ પુરો કરો. હવે अबक △, फडइ △ માં બબ્બે ખૂણા બરાબર છે; ∴ ∠अ = ∠फ. ∴ अबक △ ના ખુણાવાળો △ फडइ છે.

(૬). फइ લીટીના इ આગળ ∠क = ∠इ, અને फ આગળ ∠ब = ∠फ બનાવો. ∠इ કરતી इर ના र કોઇ પણ બિંદુ આગળ ∠ड = ∠र બનાવો. इफगर ચતુષ્કોણ પુરો કરો. હવે गरइफ ના ચાર ખૂણા = ૪ ⌊ = अबकड ના ચાર ખુણા. અને ત્રણ ત્રણ ખુણા બરાબર છે, ∴ ચોથો ∠ग = ∠अ પણ છે.

(૭). अ આગળ ∠डअब = ૫૦° પ્રોટ્રેકટરથી કરો. क માંથી अड ∥ कइ સેટસ્કવેરથી દોરો. હવે ∠कइब = ∠अ = ૫૦° છે. વળી क આગળ ∠इकर = ૮૦° કરો. ∴∠र = ૧૮૦° − ૫૦° − ૮૦° = ૫૦° છે. ∴ क માંથી બે લીટી अब સુધી ૫૦° ને ખૂણે દોરી શકાય છે.

(૮). માપવાથી ∠अपब = ½ ∠अमब છે એમ માલુમ પડે છે. સિદ્ધતામાં पम સાંધી क સુધી લંબાવો. ત્યારે બહારનો ∠अमक = ∠अ + ∠अपम, અને ∠बमक = ∠ब + ∠बपम, ∴ ∠अकब = ∠अ + ∠ब + ∠अपम + ∠बपम. પણ ∠अ = ∠अपम અને ∠ब = ∠बपम. ∴ ∠अमब = ૨ ∠अपब. (∠अमक અને ∠बमक અને ∠बमक ના સરવાળાને બદલે કોઇ વખતે બાદબાકી પણ કરવી પડે છે.)

(૯). लड, अब ને म માં મળે છે. હવે पमक △, डमक △ માં पक = डक, ∠पकम = ૧ ⌊ = ∠डकम, અને मक સામાન્ય છે, ∴ ∠पमक = ∠डकम. પણ ∠डमक = સામેના ∠लमअ; ∴ ∠पमक = ∠लमअ. ∴ प, ल માંથી દોરેલી पम लम, લીટી अब સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

(૧૦). अब સમાન્તર कपड દોરો હવે अब, कपड || છે, ∴ તેઓનાં કાટખુણ અંતર સરખાં છે; ∴ कपड ઉપર अ, ब માંથી દોરેલી લંબ બરાબર છે.

વળી अब ને म માં દુભાગી पम સાંધો पमइ લીટી દોરી તેના ઉપર अइ, बर લંબ દો. હવે अमइ △, बडर △માં अम = बम છે. प માંથી पम બીજી લીટી છે. જો प આપેલું બિંદુ अब માં અથવા अब લંબાવતાં તેમાં હોય તો રચના અશક્ય છે.

(૧૧). बक ના કોઇ પણ બિંદુ ब ને अ સાથે સાંધો. बअ ના अ આગળ ∠अबक = ∠बअड કરો. હવે अड, कब એ લીટીને આડી લીટી अब મળી વ્યુત્ક્રમ ખુણા अबक, डअब સરખા કરે છે, ∴ अड || बक છે.

अ બિંદુ बक માં અથવા લંબાવેલી बक માં હોય તો રચના અશક્ય છે.

કૃત્ય ૭ મું.

(૧). अब ઉપરના ∠अ, ∠ब એ ખુણા આપેલા છે. માટે કૃ સિ૦ ૭ પ્રમાણે △ अबक બનાવો. ∠क = ૪૨° છે, अक = ૬.૯ સે. અને बक = ૭.૧ સે. મી. છે.

૨ થી ૪. △ ની એકેક બાજુ અને તેની ઉપરના ખુણા આપ્યાં છે, માટે કૃ૦ સિ૦ ૭ પ્રમાણે △ ઓ બનાવો.

૫ થી ૧૦. આ દરેક પ્રશ્નમાં બબ્બે ખુણા આપેલા છે. અને ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળી ૧૮૦° છે. માટે જો બે ખુણા આપ્યા હોય તો ૧૮૦° માંથી એ બે ખુણાનો સરવાળો બાદ કરતાં ત્રીજો ખૂણો મળે છે. માટે એ પ્રમાણે આપેલી બાજુ અને તેની ઉપરના બે ખુણાઓ મળે છે. જેમકે ૫ મા પ્રશ્નમાં ∠अ + ∠क = ૬૭° + ૭૨° = ૧૩૯° છે; અને ∠अ + ∠ब + ∠क = ૧૮૦°; ∴ ∠ब = ૧૮૦° − ૧૩૯° = ૪૧°. ∴ પ્રશ્નમાં ક = ૩.૬″, ∠ब = ૪૧°, ∠अ = ૬૭° લઇ △ બનાવો. એજ પ્રમાણ દરેક પ્રશ્નમાં સમજવું.

(૧૧). કાટખુણો અને એક સાંકડો ખુણો અને કાટખુણાની સામેની બાજુ આપ્યાં છે. ∴ ઉપસિદ્ધાંત પ્રમાણે કરો

(૧૨). એક સાંકડો ખુણો આપ્યો છે, માટે બીજો સાંકડો ખુણો = ૧ ⌊ − એ આપેલો સાંકડો ખૂણો છે. માટે પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે કરો.

(૧૩). એક સાંકડો ખુણો $\frac{1}{3}$ કાટખુણો થાય છે; માટે ગમે તે કાટખુણ ત્રિકોણ બનાવો કે જેમાં એ પ્રમાણે ખુણા હોય. સમબાજુ ત્રિકોણમાં પાયા ઉપર સામેના શિરોબિંદુમાંથી લંબ દોરીએ તો એ પ્રમાણેના બે ત્રિકોણ થાય છે.

(૧૪). अब કર્ણ લો अबના म મધ્યબિંદુમાંથી अब ⊥ मक દોરો. એ લંબમાં क કોઇ પણ લો. कअब સમદ્વિબાજુ કાટખુણ △ છે.

(૧૫). પાયા ઉપરનો ખુણો ૧ હોય તો શિરોબિંદુ ખુણો ૨ છે. માટે આ ખુણો ૧ કાટખૂણો છે. અને શિરોબિંદુ ખૂણો ચાર ગણો હોય તો આ ખૂણો $\frac{4}{3}$ કાટખૂણો છે; પાયા ઉપરનો ખૂણો $\frac{1}{3}$ કાટખૂણો છે.

કૃત્ય ૮ મું.

૧ થી ૪. દરેક પ્રશ્નમાં બે બાજુ અને બે બાજુનો અંતર્ખુણો આપ્યાં છે. માટે દરેક પ્રશ્ન કૃ૦ સિ૦ ૮ ની રચના પ્રમાણે છોડવો.

કૃત્ય ૯ મું.

(૧). અ, બ થી ઓછી હોય અને (૧) અ, क માંથી अ′ ब′ ઉપર દોરેલી લંબથી ઓછી હોય તો અ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ अ′ ब′ ને મળે નહિ; માટે તેવી આકૃતિ દોરો; અને (૨) અ, એ લંબ બરાબર હોય તો અ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ अ′ ब′ ને એકજ ब′ બિંદુમાં મળે; માટે તેવી આકૃતિ દોરો; અને (૩) અ એ લંબથી મોટી હોય તો, કૃ. સિ ૯ મામાં આપેલી આકૃતિના જેવીજ આકૃતિ મળે.

(૨). અ, બથી મોટી હોય ત્યારે क મધ્યબિંદુ લઈ અ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ अ′ની વિરૂદ્ધ બાજુએ अ′ब′ને ब′ (∠अ′ તરફ) અને ब′માં છેદે. ∴ अ′ब′क △માં ∠अ′ (∠कअ′ब′) = ∠अ कअ′ = બ, कब′ = અ છે. માટે कअ′ब′ માગેલો એકજ ત્રિકોણ છે. कअ′ब △માં कअ′ = બ, कब = અ, પણ એ △નો કોઇ પણ ખૂણો ∠अ બરાબર નથી.

(૩). અ = બ હોય ત્યારે क મધ્યબિંદુ લઈ અ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ अ′ब′, अ′, ब′માં છેદે; એટલે એકજ △ થાય છે; ∵ अ′कब′ △માં कअ′ = બ, कब′ = અ, ∠अ′ = ∠अ છે.

(૪). बक લીટીના ब આગળ ∠कबअ = ૩૫°નો કરો बअ = ૨.૧" કાપો. ને अ મધ્યબિંદુ લઈ ૧.૭" ત્રિજ્યાનો વર્તુળ દોરો આ વર્તુળ बक ને क, क' એ બિંદુમાં છેદે છે. માટે अबक, अबक' એ △ ઓ માગેલા ત્રિકોણ છે.

(૫). ને (૬). પ્રશ્ન ૪ પ્રમાણેજ રચના કરો. એ ત્રિકોણ થાય છે.

(૭). अबक △ અને डइफ △ માં બબ્બે બાજુ અને તેમાંની એકની સામેના ખુણો – ∠ब, ∠इ—આપેલો છે. માટે એ અંગવાળા બબ્બે ત્રિકોણો अबक, अबक', અને डइफ, डइफ' – થાય છે. આમાંના બબ્બે સરખા છે. ∵ अक, डफ, बक, इफને – કાંતો જમણી બાજુ ઉપર કે કાંતો ડાબી બાજુ ઉપર – એકી વખતે છેદે તો △ઓ સરખા છે; પરંતુ એકમાં ડાબી બાજુએ અને બીજામાં જમણી બાજુએ - એકમાં बની નજીક અને બીજામાં इથી દૂર – છેદે તો △ઓ સરખા નથી. દરેક △ની આકૃતિ કૃ. સિ. ૯ ની આકૃતિના જેવી છે.

પણ આપેલા ∠ब, ∠इ સાંકડા ખુણા હોય ત્યારે એ પ્રમાણે અનિશ્ચિતના રહે છે. પણ જ્યારે એ આપેલા ખુણા કાટખુણા કે પહોળા ખુણા હોય તો अक, डफ એકજ વખતે बक, इफ ને છેદે માટે એવી વખતે ત્રિકોણો સરખા છે.

કૃત્ય ૧૦ મું.

(૧). अ બિંદુની ઉપર અને નીચે क બરાબર अड આવી શકે; તેમજ ब બિંદુની ઉપર અને નીચે क બરાબર बड આવી શકે; ∴ अब કર્ણ ઉપર क બાજુવાળા ચાર કાટખુણ ત્રિકોણ થઈ શકે છે.

(૨). કૃ. સિ. ૧૦ ની આકૃતિમાં म મધ્યબિંદુ લઇ मअ કે मब ત્રિજ્યાથી દોરેલો વર્તુળ अब વ્યાસ ઉપર છે. ∴ अडब વક્ર આકૃતિ અર્ધ વર્તુળ છે અને તેમાંનો ∠अडब એક કાટખુણો છે.

(૩). ∠अडब = ૧ ∟ = ∠अपड = ∠बपड. ∴ ∠अ + ∠अडप = ૧ ∟ = ∠ब + ∠बडप = ∠अडप + ∠बडप. ∴ ∠अ = ૯૦° – ∠अडप = ∠बडप; ∠ब = ૯૦° – ∠बडप = ∠अडप અને ∠अडब = ∠अपड = ∠बपड. ∴ ત્રણે △ઓ સમકોણ છે.

(૪). बड = ૩.૭" લેા. અને बड વ્યાસ ઉપર કૃ. સિ. ૧૦ ની રચના પ્રમાણે એક વર્તુળ દોરો. ब મધ્યબિંદુ લઇ ૧.૨"ની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ પહેલા વર્તુળને अमां છેદે તેમ દોરો. અને ड મધ્યબિંદુ લઇ ૧.૨"ની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ પહેલા વર્તુળને कમાં છેદે તેમ (अની સામેની બાજુએ) દોરો. अब, बक, कड, डअ સાંધેા ત્યારે अबड, कबड એ માગેલા કાટખૂણ ત્રિકોણો છે. માટે अबकड લંબચોરસ છે, અને તે ૩.૭"ના વ્યાસના વર્તુળમાં છે.

(૫). अब કોઇ પણ લીટી લેા. अबને બન્ને લંબ હોય તેમ अड, बक દોરો. अड = बक કાપેા. अबની એકજ બાજુએ ड, क આવેલાં છે कड સાંધેા. ત્યારે अड || = बक; ∴ अबकड || કોણ છે: અને ∠अ = ૧ ∟, ∴ अबकड લંબચોરસ છે.

(૬). આપેલી अब બાજુ ઉપર અર્ધવર્તુળ દોરો. તેમાં આપેલી अड લંબ બરાબર એક જ્યા મુકો बड લંબાવો अक, अब ઉપર લંબ દોરો. अक જો बडને कમાં મળે તો अबक માગેલો કાટખૂણ ત્રિકોણ છે.

(૭). अम આપેલો સરવાળો લો ∠अमब અર્ધો કાટખૂણો કરો. अ મધ્યબિંદુથી अब કર્ણ બરાબર ત્રિજ્યા લઇ એક વર્તુળ દોરી मबને ब, ब'માં મળવા દો. मबक, मब'क' દરેક અર્ધો કાટખૂણો કરો क, क' બિંદુઓ अम ઉપર છે. ત્યારે अबक, अब'क' માગેલા ત્રિકોણ છે.

---

§ ૨૨. સમાન્તર લીટીની, લીટીના સરખા ભાગની, અને કૈંસ દ્વિભાગની રચના.

કૃત્ય ૧૧ મું.

(૧). માપ લેવાથી अक = बड છે; અને ∠क = ∠ब = ૧૨૦° છે. સિદ્ધતાથી પણ कड || = अब, ∴ अबडक || કોણ છે. ∴ પણ ∠क = ∠ब = ૧૨૦° અને अक = डब છે.

(૨) બન્ને જ્યા સરખી છે. અને દરેક જ્યા ૨.૨" છે.

(૩). अकडब રોમ્બસ છે; ∴ अम = मड, અને बम = मक છે; વળી માપ લેતાં बम = ૧.૬" = मक છે; અને अम = ૨.૮" = मड છે.

(૪). કારણકે अबक △, कबड △ માં अब = कड, कब સામાન્ય છે, અને कअ = बड; ∴ △ઓ સર્વસમાન છે; ∴ ∠अबक = ∠बकड. પણ આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે; ∴ अब ‖ कड છે.

(૫). अब ની સમાન્તર (ધારો કે) લીટી દોરવાની છે. अ છેડાએ अब ઉપર સરખા છેડાનો એક લાકડાનો કકડો મુકો; આ કકડાના છેડા આગળ નિશાની કરો. એજ પ્રમાણે ब છેડાએ પણ કરો. બહાર પડતી બન્ને નિશાની સાંધીએ તો તે લીટી अब ની સમાન્તર છે.

(૬). अब કોઇ પણ લીટી લો ब માંથી अब ઉપર बक લંબ દોરો. बक ને अब થી બેવડી કાપો. તેજ પ્રમાણે अ માંથી अड લંબ દોરી अड ને अब થી બેવડી કાપો. कड સાંધો. ∵ बक ‖ = अड, અને ∠अ કાટખુણો છે, ∴ अबकड લંબચોરસ છે, અને તેમાં अड = ૨ अब છે, એટલે એ લંબચોરસની બાજુ ૨ : ૧ માં છે.

(૭). ૪" ની એક अब લીટી લો અને अम = ·૫" = बर કાપો. म, र માંથી अब ઉપર બે લંબ એકજ બાજુએ દોરો. अ, ब મધ્યબિંદુ લઈ ૧·૫" ની ત્રિજ્યાના બે વર્તુળો म, र માંથી દોરેલા લંબને ड, क માં છેદે તેમ દોરો. कड સાંધો. ત્યારે अबकड માગેલું ટ્રાપિઝ્યમ છે કારણ કે मड ‖ रक, અને △ अमड = △ बरक છે; ∴ कड ‖ अब છે; અને कड = रम = अब – ૧" = ૩" છે અને अड = ૧·૫" = बक છે.

(૮) अड = ૪·૨" ર્ણક લો. अड વ્યાસ ઉપર એક વર્તુળ દોરો. अ, ड મધ્યબિંદુ લઇ ૨·૪" ની ત્રિજ્યાઓ લઇ अड ની વિરૂદ્ધ બાજુએ વર્તુળને ब, क માં છેદે તેમ બે વર્તુળો દોરો. अब, बड, डक, कअ સાંધો. ત્યારે अबड, अकड બન્ને કાટખુણ △ઓ છે. માટે अबडक લંબ ચોરસ છે અને તેમાં કર્ણ ૪·૨" ની અને એક બાજુ ૨·૪" ની છે.

(૯). સ૦ ચ૦ના કર્ણો અરસપરસ દુભાગે છે. માટે ∠अमड = ૭૫° નો લો. मअ = ૪" ÷ ૨ = ૨" ની લો અને मड = ૬" ÷ ૨ = ૩" ની લો. अम લંબાવી मक = मअ, કરો. અને डम લંબાવી मब = मड કરો. अब, बक, कड, डअ સાંધો. ∵ अबकड ચતુષ્કોણમાં કર્ણો અરસપરસ દુભાગે છે, ∴ अबकड સ૦ ચ૦ છે. અને તેના કર્ણો ૪", ૬" ના છે; અને કર્ણોનો અંતર્ખુણો ૭૫° નો છે

(૧૦). अब = ૪" લો અને ∠बअड = ૫૫° નો કરો. अ માંથી अब ઉપર अम લંબ દોરી अम = ૨·૧" કાપો. म માંથી अब ‖ मडक દોરો. આ

સમાન્તર લીટી अड ને ड માં છેદે છે. मड લંબાવી डक = ૪" = अब કરો. कब સાંધો. ∵ अब ‖ = डक, ∴ अबकड સ ચ. છે અને તેની બાજુ ૪" છે, એક ખૂણો ૫૫° છે, અને તેની ઉંચાઇ (બે સામે સામેની બાજુનું લંબ અંતર) ૨·૧" છે.

(૧૧). કારણકે अल ‖ = बफ છે; ∴ अफबल સમાન્તર બાજુ ચતુષ્કોણ છે; ∴ फअ ‖ बक છે.

કૃત્ય ૧૨ મું.

(૧). अब કોઇ પણ લીટી લો. अब ના પાંચ ભાગ – લીટીનું અર્ધું કરી – તેનું અર્ધું કરી – આશરે જોઇનેજ કરો. કૃ૦ સિ૦ ૧૨ પ્રમાણે ∠बअक કરી अक ઉપર પાંચ સરખા ભાગ કાપી સાંધી સમાન્તર લીટીઓ દોરી अब ના પાંચ સરખા ભાગ કરો. જુઓ કે આ ભાગ પહેલાના ભાગો સાથે બરાબર મળે છે કે નહિ.

(૪). એક આખી લીટીનો $\frac{૩}{૭}$ ભાગ કાપવાનો છે. એટલે આખી લીટીના સાત ભાગ કરી એવા ત્રણ ભાગનો સમૂહ લેવાનો છે. अब કોઇ પણ લીટી લો. તેના સાત સરખા ભાગ કરો. ધારો કે ત્રીજો કકડો फ આગળ પુરો થાય છે. ∴ अफ ભાગ अब નો $\frac{૩}{૭}$ છે.

(૫). ૧$\frac{૪}{૧૧}$ ગણી એક લીટી કરવાની છે, એટલે આખી લીટી ઉપર $\frac{૪}{૧૧}$ ભાગ વધારવાનો છે. માટે अब લીટીના ૧૧ સરખા ભાગ કરો. अब ને ड સુધી લંબાવો. बड = अब ના ચાર ભાગનો સરવાળો હોય એમ કરો. ∴ अड = अब + बड = ૧ + $\frac{૪}{૧૧}$ = ૧$\frac{૪}{૧૧}$ अब છે.

(૬). ૧·૩ = ૧$\frac{૩}{૧૦}$ છે. માટે પ્રશ્ન ૫ પ્રમાણેજ ૧૧ ભાગને બદલે ૧૦ ભાગ કરી પ્રશ્ન છોડો.

(૭). ·૭ = $\frac{૭}{૧૦}$ છે. માટે अब લીટીના દશ સરખા ભાગ કરી તેમાંથી સાત ભાગનો સમૂહ પ્રશ્ન ૪ પ્રમાણે લો.

(૮). ૩ : ૯ ના પ્રમાણમાં એટલે એક ભાગ ૩ હોય તો બાકીનો બીજો ભાગ ૯ હોય એટલે આખી લીટી ૩ + ૯ = ૧૨ હોય. માટે अब ના ૧૨ સરખા ભાગ કરો અને તેના ત્રણ ભાગ क આગળ પુરા થાય તો अक : कब . : ૩ : ૯ છે.

(૯). એક લીટીના ગમે તેટલા સરખા કકડા કરો અને તેનો એક ભાગ લઇને બાકીના સાથે સરખાવો. એટલે બન્ને ભાગોનું ગુણોત્તર કહો. પહેલા ભાગમાં સરખા કકડાની જેટલી સંખ્યા છે તે સંખ્યાને બીજા ભાગમાંના સરખા કકડાની સંખ્યાએ ભાગો.

કૃત્ય ૫ થી ૧૨ ઉપરના પ્રશ્નો.

(નીચેના ઉત્તરોમાં સિદ્ધતા ઉમેરી લેવી.)

(૧). ∠**अबक** આપેલા ખુણા બરાબર બનાવો. **बअ**, **बक** આપેલી બાજુએા બરાબર કાપો. **अ**, **क**, માંથી સામેની બાજુની સમાન્તર લીટીએા દોરો, **अबकड** સ૦ ચ૦ પુરો કરો.

(૨). ∠**अबक** એક કાટખુણો દોરો. **बअ** = ૨ **बक** કાપો **अबकड** લંબચોરસ પુરો કરો.

(૩). **अब** આપેલી બાજુ દોરો. ∠**अबक** ૬૦° નો કરો. **बक** માં કોઇ પણ **क** બિંદુ લો. **अबकड** સ૦ ચ૦ પુરો કરો.

(૪). આપેલી પરિમિતિનો અર્ધો ભાગ ધારો કે **पर** છે **पर** ના **ब** આગળ ∠**पबम** આપેલા ખુણા બરાબર કરો. **बर** = **बम** કાપો. **पबमव** સ૦ ચ૦ પુરો કરો.

(૫). **अब** આપેલી લીટી લો. **अब** ઉપર **अड** દોરો. **अड**⊥આપેલા અંતર બરાબર કાપો **ड** માંથી **अब** સમાન્તર લીટી દોરો.

(૬). ૧.૨", ૧.૮", ૨.૪" ની બાજુનો (**अक** = ૨.૪") **अबक** ત્રિકોણ બનાવો. **क** માંથી **अब** ‖ **कड** અને **अ** માંથી **बक** ‖ **अड** દોરો.

(૭). **अब** = ૩.૪ સે. મી. દોરો. **अब** ⊥ **अड** દોરો. **ब** મધ્યબિંદુ લઈ ૫.૪ સે. મી. ની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ **अड** ને **ड** માં છેદે તેમ દોરો. **ड** માંથી **अब** ‖ **डक** દોરો. **अबकड** લંબચોરસ પુરો કરો.

(૮). **अब** એક બાજુ લો. **अब** થી આપેલા અંતરે **डक** સમાન્તર દોરો. **अ** મધ્યબિંદુ લઇ બીજી આપેલી બાજુ બરાબર ત્રિજ્યા લઇ એક વર્તુળ **कड** ને **ड** માં છેદે તેમ દોરો. **अबकड** સ૦ ચ૦ પુરો કરો.

(૯). ∠**बअक** એક કાટખુણો લો. **अब** કોઇ પણ લંબાઇની કાપો **अब** ઉપર **क** ની તરફ એક સમબાજુ ત્રિકોણ **अबइ** દોરો ત્યારે ∠**इअब** = $\frac{2}{3}$ કાટખુણો છે. ∴ ∠**कअइ** = $\frac{1}{3}$ કાટખુણો. ∠**इअब** ને **अइ** થી દુભાગો. ∴ ∠**बअक** કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ થયા છે.

(૧૦). આપેલી ઉંચાઇ બરાબર અંતર હોય એવી બે **अब**, **कड** સમાન્તર લીટી દોરો. **कड** ના **क** બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈ બાજુઓને ત્રિજ્યા લઇ **अब** ને વિરૂદ્ધ બાજુએ **अ**. **ब** માં છેદે તેમ બે વર્તુળો દોરો. ત્યારે **अबक** માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૧૧). **अब** પાયો લો. **अब** ને **ड** માં દુભાગો, **अड**, આપેલી બાજુ અને મધ્યગાનો એક **अडक** △ બનાવો. **कब** સાંધો. ∴ **अबक** માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૧૨). **अब** પાયો લો. **अब** થી આપેલી ઉંચાઇએ **कड** સમાન્તર દોરો. **अ** મધ્યબિંદુ અને આપેલી બાજુની ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ **कड** ને **क** માં છેદે તેમ દોરો. **अबक** △ પુરો કરો.

(૧૩). આપેલી **अब** બાજુ લો. આપેલી કર્ણોને દુભાગી તેનાં અડધીઆં બરાબર બાજુ હોય એવો **अबम** △ બનાવો. **बअ**, **अम** લબાવી **बड**, **अक** આપેલી કર્ણો બરાબર કરો. **अबकड** સ. ચ. પુરો કરો.

(૧૪). **मकड** કોઇ પણ લીટી દોરો. **मकड** થી આપેલી ઉંચાઇએ **अब** સમાન્તર દોરો. ∠**मकअ**, ∠**डकब** આપેલા ખુણા બરાબર કરો. **अबक** માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૧૫). **अडब** કોઇ પણ લીટી દોરો. **अडब** ⊥ **डक** દોરો. **डक** આપેલી ઉંચાઇ બરાબર લો. ∠**डकअ**, **डकब** દરેક ૩૦° ના કરો. **अबक** △ સમબાજુ છે.

(૧૬). ૩૦° ને બદલે આપેલા ખુણાથી દરેક અર્ધો હોય એવા ∠**डकअ**, ∠**डकब** કરી પ્રસ્ન ૧૫ પ્રમાણે કરો.

(૧૭). શિરોબિંદુ ખુણો પાયા ઉપરના ખુણાથી ચારગણો છે; ∴ પાયા ઉપરનો દરેક ખુણો ૩૦° નો છે. **अब** કોઇપણ લીટી પાયા તરીકે લો. ∠**बअक**, ∠**अबक** દરેક ૩૦° નો કરો **अबक** માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૧૮). **अब** = ૧·૩″ લો. **अब** ને **ड** માં દુભાગી **अब** ⊥ **डक** દોરો. **डक** ના કોઇપણ **क** બિંદુને **अ**, **ब** સાથે જોડીએ તો **अबक** સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૧૯). પ્રસ્ન ૧૮માં **डक** આપેલી ઉંચાઈ બરાબર લઇ **अबक** સમદ્વિબાજુ △ કરો.

(૨૦). પ્રસ્ન ૧૭ પ્રમાણે ૨·૪″ ની **अक** લઇ **अबक** સમદ્વિબાજુ △ બનાવો. અને **अबकड** રોમ્બસ પુરો કરો.

(૨૧) સમબાજુ △ની મધ્યગા તે તેની ઉંચાઇ પણ છે. માટે પ્રશ્ન ૧૫ પ્રમાણે કૃત્ય કરો.

(૨૨). ∠बअक કાટખુણો લો. अक આપેલી બાજુ બરાબર કાપો. अक ઉપર ब તરફ એક અર્ધ વર્તુળ દોરો. अ મધ્યબિંદુ લઇ કર્ણ ઉપર દોરેલી લંબ બરાબર ત્રિજ્યા લઇ અર્ધ વર્તુળને ड માં છેદે તેમ એક વર્તુળ દોરો. ત્યારે अकड કાટખુણ △ છે. कड ને લંબાવી बअ ને ब માં મળવા દો. ત્યારે अबक માગેલો કાટખુણુ ત્રિકોણ છે.

(૨૩). डअब લીટી બે બાજુના આપેલા સરવાળા બરાબર લો. ∠बडक = ½ કાટખુણો કરો. ब મધ્યબિંદુ લઈ આપેલી કર્ણની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ डक ને क, क' માં છેદે તેમ દોરો. क, क' માંથી डअब ઉપર कअ, क'अ' લંબ દોરો. ∴ अबक, अ'बक' માગેલા કાટખુણ △ઓ છે.

(૨૪). लबङकर લીટી આપેલી પરિમિતિ લો. તેને डમાં દુભાગો. डમાંથી बडक⊥डअ દોરો. डअ આપેલી ઉંચાઈ બરાબર કાપો. लअ, रअ સાંધો. ∠ल = ∠लअब, અને ∠र = रअक કરો ત્યારે अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(૨૫). આપેલા ખૂણા બરાબર ∠बअक લો તેને अडथी દુભાગો. अड⊥अर દોરો અને अर = ½ પાયો કરો रમાંથી अड ∥ रक કરો. क માંથી अड ⊥ कडब દોરો ત્યારે अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૨૬). बक આપેલો પાયો લો. શિરોબિંદુ ખૂણો અને પાયા ઉપરના એક ખુણાના સરવાળા બરાબર ∠कबड કરો. डबને अ સુધી લંબાવો. ∴ ∠अबक પાયા ઉપરનો એક ખુણો છે. ∠अबक = ∠अकब કરો. ∴ अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૨૭). बक પાયો લો. बकને डમાં દુભાગી बकं ⊥ डअर દોરો. डर આપેલા સરવાળા બરાબર લો. रब સાંધી ∠रबड = ∠बरअ કરો. अक સાંધો. ∴ अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે.

(૨૮). लबकइ આપેલી લીટી છે; અને ड, र આપેલાં બિંદુ છે, ल, इ આગળ આપેલી લીટી સાથે ૬૦°ના ખૂણા કરો. આ ખૂણાની શાખા લીટીઓની સમાન્તર डइમાંથી આપેલી લીટી સુધી डब, रक દોરો. बड, कर જો अमां મળે તો अबक માગેલો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(૨૯). म કોઇ પણ મધ્યબિંદુ લઇ આપેલી ત્રિજ્યાનો अबक વર્તુળ દોરો. તેમાં આપેલા પાયા બરાબર बक જ્યા મુકો बक સમાન્તર अ अ'

આપેલી ઉંચાઇના અંતરે વર્તુળને अ, अ'માં છેદે તેમ દોરો ∴ अबक, अ'बक માગેલા △ એ છે.

(૩૦). अबक △ લો. अब બાજુને ड, इ માં ત્રીજે ભાગે કાપો. ड માંથી बक સમાન્તર डर દોરો. र જો अक ઉપર હોય તો डर માગેલી લીટી છે.

(૩૧). પ્રશ્ન ૩૦ પ્રમાણે કરો.

કૃત્ય ૧૩ મું.

(૧). ∠अमब = ૯૦° નો કરો. म મધ્યબિંદુ લઈ ગમે તે ત્રિજ્યા લઇ अकब કૌંસ કરો અને તેને કૃ૦ સિ. ૧૩ પ્રમાણે દુભાગો.

(૨). अकब એક અર્ધ વર્તુળ લો કૃ૦ સિ૦ ૨ ની રચના કરી अकब ને દુભાગો અને કૃ૦ સિ૦ ૧૩ પ્રમાણે પણ દુભાગો.

(૩). અને (૪). કૃ૦ સિ૦ ૧૩ પ્રમાણે કરો.

(૫). ∠अमब = ૪૫° કરો. मअ = ૩·૪″ કાપો. म મધ્યબિંદુ લઇ मअ ત્રિજ્યાથી अकब કૌંસ કરો. अब સાંધો, अब ને ड માં દુભાગી अब ⊥डप દોરો. डप, કૌંસને प માં છેદે તો કૌંસ प માં દુભાગાય છે.

(૬). પ્રશ્ન ૫ પ્રમાણે કરો.

(૭). अकब કોઇ પણ કૌંસ લો. તેને क માં દુભાગો અને अक, कब ને ड,र માં દુભાગો તેથી अकब ના ચાર સરખા ભાગ થયા છે. વળી આ દરેક ભાગને દુભાગો અને તેથી આખા अकब કૌંસના આઠ ભાગ થયા છે.

---

§ ૨૩. નિધાન.

નિધાનનો પહેલો સિદ્ધાંત.

(૧). म એક આપેલું બિંદુ લો म મધ્યબિંદુ લઇ અને ૨·૧″ ની ત્રિજ્યા લઇ એક अबक વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ म છે, અને દરેક ત્રિજ્યા ૨·૧″ છે ∴ अबक વર્તુળ માગેલું નિધાન છે, કારણ કે વર્તુળનું કોઇપણ બિંદુ म થી ૨·૧″ ને અંતરે છે.

(૨). વર્તુળના જે પરિધ ઉપર મીનીટ કાંટાની અણી ફરે તે પરિધ એ અણીનું નિધાન છે, અને એ વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કાંટાના જે સ્થિર બિંદુની આસપાસ કાંટો ફરે તે છે એજ પ્રમાણે કલાક કાંટાની અણીનું નિધાન બીજો પહેલાથી સહેજ મોટો વર્તુળ છે. કે જેનું મધ્યબિંદુ ઉપર માફક કલાક કાંટાનું સ્થિર બિંદુ છે આ બે નિધાનો બે સમકેંદ્રો વર્તુળો છે.

(૩). જે જગ્યાએથી અવાજ નીકળે તે જગ્યા अ છે એમ ધારો. ૩૮૦ વારને ૧" : ૧૦૦ વારના સ્કેલમાં બતાવો તે ૩૮૦ વાર = ૩.૮" अ મધ્યબિંદુ લઈ ૩.૮" ની ત્રિજ્યાથી એક पकड વર્તુળ દોરો કારણ કે અવાજ બધી દિશામાં પ્રસરે છે, માટે अ ની બધી બાજુએ पकड વર્તુળમાં જે જે લોકો હોય તે બધા એ અવાજ સાંભળે છે.

(૪). આંકુણીની ધરી એક સીધી લીટી છે અને તે હંમેશાં આંકુણીની ત્રિજ્યાની ઉંચાઇએજ કાગળથી દૂર રહે છે માટે તેની ધરી કાગળની સમાન્તર સરકાઈ છે અને આંકુણીના છેડાના મધ્યબિંદુઓ કાગળથી એ ત્રિજ્યાનાં અંતરે બે સમાન્તર લીટીઓ દોરે છે, કે જે સમાન્તરોનું અરસ પરસ અંતર આંકુણી જેટલું છે.

(૫). રસ્તાની બન્ને કોરો સમાન્તર છે એમ ધારી લેવામાં આવ્યું છે. માણસનું અંતર એ કોરોથી હંમેશાં એકજ રહે છે, માટે તેની ગતિનો માર્ગ એ કોરોની સમાન્તર રહેવો જોઇએ.

(૬.) બારણાની ખરી ધરી બે બાકાંની વચ્ચે રહે છે અને બારણું ફરે છે ત્યારે એ ખરી ધરી ફરતી નથી, કારણ કે એ ધરી વસ્તુતઃ કલ્પનાથીજ વિચારીજ શકાય છે. પરંતુ બારણાની ધરીને જો બારણાના ગુરૂત્વ બિંદુમાંથી જતી ધારી લઇએ તો એ ધરી ક્ષિતિજને લંબ છે અને બારણું જેમ ફરે છે તેમ એ ધરી બે બાકાંની વચ્ચે આવેલી ધરીની આસપાસ એક ગોળાકારમાં ફરે છે અને તેનું નિધાન નળાકાર છે.

(૭). એક રૂપીઓ સ્થિર છે અને બીજો રૂપીઓ તેની આસપાસ કોરની અડોઅડ ફરે છે. માટે બન્નેનાં મધ્યબિંદુઓનું અંતર બે રૂપીઆની ત્રિજ્યાના સરવાળા બરાબર હંમેશાં રહે છે માટે જે રૂપીઓ ફરે છે તેનું મધ્યબિંદુ આ સરવાળાના અંતરની ત્રિજ્યાથી સ્થિર રૂપીઆના મધ્યબિંદુની આસપાસ એક વર્તુળ દોરે છે.

(૮). રસ્તો વર્તુળાકાર છે અને તેના પરિધથી ટપાલી હંમેશાં એક વાર છેટે દોડે છે. માટે તે એક વર્તુળના પરિધ ઉપર દોડે છે, કે જેનું

મધ્યબિંદુ રસ્તાનું મધ્યબિંદુ છે અને જેની ત્રિજ્યા રસ્તાની ત્રિજ્યા કરતાં એક વાર લાંબી છે.

(૯). કોઇ પણ વસ્તુ જમીન ઉપર પડે તો તે હંમેશાં પૃથ્વીના ગુરૂત્વ બિંદુ તરફ ખેંચાય છે. માટે જે લીટીમાં પથરો પડે છે તે પૃથ્વીના ગુરૂત્વ બિંદુ અને પથરાના ગુરૂત્વ બિંદુને સાંધનારી લીટીમાં છે.

(૧૦). **अब**, **अक** એ કાટખુણે છેદતી લીટી લો. ∠**बअक**ને દુભાગો. **अड** દુભાગનારી લીટીમાંના કોઇ પણ **ड** બિંદુમાંથી **अब** ⊥ **डब** અને **अक**⊥**डक** દોરો. ત્યારે **अबडक** લંબચોરસ છે; અને વળી ∠**बअड** = ∠**कअड**; ∴ **अबडक** ચોરસ છે. ∴ **डब** = **अक** = **कड**. એજ પ્રમાણે **अड**નું કોઇ પણ બિંદુ **अब**, **अक**થી સમાન અંતરે છે. ∴ **अड** એ બિંદુનું નિધાન છે.

(૧૧) **अब** દિવાલ છે અને **अक** જમીન છે. ધારો કે **बक** આંકણીની એક સ્થિતિ છે ત્યારે **अबक** કાટખૂણ ત્રિકોણ છે. આ **बक** આંકણી એ △ની કર્ણ છે. **बक** કર્ણને **ड**માં દુભાગી **अड** સાંધો. ત્યારે **अड** = $\frac{1}{2}$ **बक** = આંકણીથી અર્ધું અંતર = મુકરર અંતર છે. તેથી આંકણીનું મધ્યબિંદુ **अ**થી મુકરર અંતરે છે. માટે **अ** મધ્યબિંદુ લઇ **अड** ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરીએ તો આ વર્તુળ આંકણીના મધ્યબિંદુનું નિધાન છે.

(૧૨). **अब**, **अक** એ લીટી કાટખૂણે લો. **अब**, **अक** એ પાસે પાસેની બાજુ લઇ એવો લંબચોરસ બનાવો કે **अब** = ૨ **अक** હોય. **अड** તેની એક કર્ણ છે. ત્યારે **अड** માગેલું નિધાન છે. **अड** ઉપર કોઇ પણ **ल** બિંદુ લઇ **अब**, **अक** ઉપર અંતર લઇ આ અંતરો માપો ત્યારે ૨ **लब′** = **लक′** છે. અને એ પ્રમાણે કોઇ પણ બિંદુ **अड** ઉપર લીધું હોય તો તેનું **अब**થી અંતર = $\frac{1}{2}$ તેનું **अब**થી અંતર છે.

એજ પ્રમાણે **अब** = ૩ **अक** લઇ લંબચોરસ બનાવી પ્રશ્નનો બીજો ભાગ પણ કરો.

(૧૩). **अब** ⊥ **अक** લો. **अक** = ૫″ = **अब** કાપો. **बक** સાંધો. **बक** માં કોઇ પણ **ड** બિંદુ લો. **अब** ⊥ **डइ** અને **अक** ⊥ **डल** દોરો. હવે △ **डलक** માં ∠**क** = $\frac{1}{2}$ ∟ = ∠**लडक**. ∴ **लड** = **लक**. અને **डइ** = **लअ**. ∴ **डइ** + **डल** = **अल** + **लक** = **अक** = ૫″ છે. એજ પ્રમાણે **बक** ના કોઇ પણ બિંદુનાં **अब**, **अक** ઉપરનાં અંતરોનો સરવાળો ૫″ છે. ∴ **बक** માગેલું નિધાન છે.

(૧૪). अब ⊥ अक લો. अब = ૩″ = अक કાપો. बक સાંધો અને ड સુધી લંબાવો. ड માંથી अब ⊥ डइ, અને कअ ⊥ डल દોરો. अबक △ કાટખૂણ સમદ્વિબાજુ છે. માટે डइब △ પણ કાટખૂણ સમદ્વિ-બાજુ છે. ∴ डब ચોરસ છે. ∴ डइ = इब ∴ ड નાં બે લીટી ઉપરનાં અંતરોનો તફાવત = डल –डइ = इअ – इब = अब = ૩″ છે. એજ પ્રમાણે बक ને બંને બાજુ લંબાવીએ તો આ લંબાવેલા ભાગ ઉપરનું કોઇ પણ બિંદુ આપેલી સરત પુરી કરે છે. ∴ એ ભાગો માગેલાં નિધાન છે

(૧૫) अ, ब क ત્રણ આપેલાં બિંદુ એકજ સીધી લીટીમાં હોય તો એ ત્રણેથી સરખે અંતરે હોય એવું બિંદુ મળી શકે નહિ, જેનું કારણ નીચેની સિદ્ધતાથી માલમ પડશે ત્રણે સીધી લીટીમાં ન હોય તેવાં अ, ब, क લો. अब, अक સાંધો. ત્યારે अब, अक જુદી લીટીઓ છે. अब ને ड માં દુભાગી अब ⊥ डल દોરો. અને अक ને प માં દુભાગી अक ⊥ पल દોરો. હવે अब, अक એકજ લીટી હોય તો તેઓ ઉપર દોરેલી લંબ લીટી સમાન્તર હોઇ માંગેલું બિંદુ મળી શકે નહિ. પણ अब, अक જુદી લીટી છે. માટે डल, पल અસમાન્તર છે; માટે તેઓ (ધારો કે) ल માં મળે છે. ल બિંદુ डल ઉપર છે. ∴ लअ = लब, તેમજ लअ = लक. ∴ ल બિંદુ अ, ब, क ત્રણેથી સમાન અંતરે છે.

(૧૬). अ મધ્યબિંદુ લઇ ૪″ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ દોરો. ब મધ્યબિંદુ લઇ ૪.૫″ ત્રિજ્યાનો વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો જો અરસપરસ ન છેદે તો માગેલું બિંદુ અશક્ય છે પણે अब અંતર ૪″ + ૪.૫″ = ૮.૫″ થી ઓછું હોય તો એ વર્તુળો બે બિંદુમાં (क, ड માં) છેદે છે અને તે માગેલાં બિંદુ છે અને अब અંતર ૮.૫″ બરાબર હોય તો એ વર્તુળો એકજ બિંદુમાં (पમાં) સ્પર્શ કરે છે અને તે માગેલું બિંદુ છે.

(૧૭). म મધ્યબિંદુનો એક अबक વર્તુળ લો. मक સાંધો અને मक ને લંબાવી कड = ૨.૪″ કરો. म મધ્યબિંદુથી मड ત્રિજ્યા લઇ એક पडल સમકેંદ્ર વર્તુળ દોરો. આ पडल વર્તુળનું દરેક બિંદુ म થી આપેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાથી ૨.૪″ વધારે અંતરે છે માટે તેનું દરેક બિંદુ આપેલા વર્તુળના પરિધિથી ૨.૪ અંતરે છે માટે पडल વર્તુળ માગેલું નિધાન છે.

(૧૮). अ, ब સાંધો. अब ને ड માં દુભાગો अब ⊥ डल દોરો. डल નું કોઇપણ બિંદુ अ, बथी સમાન અંતરે છે. અને જો डल, पक ને र માં મળે તો र, डल ઉપર છે, માટે र પણ अ, ब થી સમાન અંતરે છે.

પણ જો पक ∥ डल હોય તો डल, पक ને મળે નહિ અને ત્યારે માગેલું બિંદુ અશક્ય છે.

(૧૯). बक ⊥ बअ દોરો. बअ = ૩·૧″ કાપો. बक ∥ अड દોરો. अड ના કોઇપણ ड બિંદુમાંથી बक ⊥ डक દોરો. ત્યારે अबकड લંબ ચોરસ છે. ∴ अब = डक = ૩·૧″ છે. એજ પ્રમાણે अड નું કોઇપણ બિંદુ बक થી ૩·૧″ ને અંતરે છે માટે अ નું નિધાન अड લીટી છે.

નિધાન ઉપરની નોટ ઉપરના પ્રશ્નો.

(૧). ∠बअक લો અને તેને अडથી દુભાગો. अब ⊥ डब, અને अक ⊥ डक દોરો. હવે अबड △, अकड △માં अड સામાન્ય છે, ∠ब = ∠क, ∠बअड = ∠कअड, ∴ डब = डक. એજ પ્રમાણે अडનું કોઇ પણ બિંદુ अब, अकથી સમાન અંતરે છે.

(૨). डमांथी बक ∥ लडर દોરો. અને अमांथी अप′ड′, बकને प′માં અને लडને ड′માં છેદે તેમ દોરો. હવે अडड′ △માં अप = पड, અને पप′ ∥ डड′, ∴ अप′ = प′ड′. એજ પ્રમાણે अमांथी लडर સુધી કોઇ પણ લીટી દોરીએ તો તે बकથી દુભાગાય છે. માટે इનું નિધાન लडर લીટી છે, કે જે बक ∥ છે.

(૩). ∠बअक = ૬૭°નો કરો. अब ∥ डल, ૩·૪ સે. મી.ને અંતરે, અને अक ∥ पड, ૨·૯ સે. મી. ને અંતરે, દોરો. આ બે સમાન્તરો डमां મળે તો ड માંગેલું બિંદુ છે; કારણ કે डल ∥ बअ, ∴ ड, बअथी ૩·૪ સે. મી. દૂર છે. અને पड ∥ अक, ∴ ड, अकથી ૨·૯ સે. મી. દૂર છે.

(૪). अब આપેલી લીટી, અને क આપેલું બિંદુ લો. क મધ્યબિંદુ લઇ ૪″ ત્રિજ્યાનો એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળનું કોઇ પણ બિંદુ कથી ૪″ અંતરે છે. अब ∥ એક લીટી (ઉપર કે નીચે) ૪″ અંતરે દોરો. આ સમાન્તરનું કોઇ પણ બિંદુ अबथी ૪″ અતરે છે. માટે આ સમાન્તર જો વર્તુળને प, लમાં છેદે તો प, ल માગેલાં બિંદુ છે. अबथी कનું અંતર ૪″ + ૪″ = ૮″ હોય તો अबની સમાન્તર લીટી વર્તુળને એકજ બિંદુમાં સ્પર્શ કરે છે. અને તે બિંદુ માગેલું બિંદુ છે.

જો अबथी क ૮″ કરતાં વધારે અંતરે હોય તો अबની સમાન્તર લીટી વર્તુળને છેદે નહિ અને ત્યારે કૃત્ય અશક્ય છે

(૫). अ મધ્યબિંદુ લઈ ૫" ત્રિજ્યાનો વર્તુળ દોરો. અને ब મધ્ય બિંદુ લઈ ૫.૯" ત્રિજ્યાનો વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળો क, ड માં છેદે તો क, ड બન્ને अ થી ૫" દૂર છે. માટે क, ड માગેલાં બિંદુ છે.

(૬). अब સાંધી તેને क માં દુભાગો. अब ⊥ कड દોરો. આ લંબ વર્તુળને ड, ल માં છેદે તો એ બન્ને अब ને દુભાગનાર લંબ ઉપર છે, માટે બન્ને अ, ब થી સમાન અંતરે છે. માટે ड, ल માગેલાં બિંદુ છે.

(૭). कब, कड થી સમાન અંતરે રહેતાં બિંદુઓ ∠बकड ને દુભાગનારી લીટી ઉપર છે. આ લીટી पम ને र માં મળે છે. માટે र, कब, कड થી સમાન અંતરે છે. જો कर દુભાગનારી લીટી पम ∥ હોય તો બિંદુ અશક્ય છે.

(૮). પ્રશ્ન ૫ પ્રમાણે રચના કરો. એ બિંદુ નીકળશે.

(૯). अब ∥ એ લીટી पम, रल, ૪" ને અંતરે બન્ને બાજુ દોરો. અને कड ∥ એ લીટી पर, मल, ૫" ને અંતરે બન્ને બાજુ દોરો આ ચાર સમાન્તરો प, र, ल, म, માં છેદે છે. ત્યારે એ દરેક બિંદુ આપેલી अब થી ૪" અંતરે છે અને कड થી ૫" અંતરે છે.

(૧૦). अब ને म માં દુભાગો. म મધ્યબિંદુ લઇ मअ કે मब ત્રિજ્યાથી अब વ્યાસ ઉપર अकब વર્તુળ દોરો. कअ, कम, कब સાંધો. હવે કૃ૦ સિ૦ ૧૦ પ્રમાણે अकब △ કાટખૂણ છે. માટે अब કર્ણ ઉપર દોરેલા કાટખૂણ △ નું क શિરોબિંદુ अब વ્યાસ ઉપર દોરેલા વર્તુળ ઉપર છે. અને એજ પ્રમાણે આ વર્તુળના કોઇ પણ બિંદુ अ, ब સાથે સાંધીએ તો એ પ્રમાણે अब કર્ણ ઉપર કાટખૂણ ત્રિકોણ થાય છે. માટે अकब વર્તુળ માગેલું નિધાન છે.

(૧૧). ૪" બાજુઓનો अबक સમબાજુ △ દોરો. अ મધ્યબિંદુ લઇ ૩.૫" ની ત્રિજ્યાથી વર્તુળ बक પાયાને ड, प છેદે તેમ દોરો. ત્યારે ड, प માગેલાં બિંદુ છે અને डप = ૧ ઇંચ છે. (અને बड = ૧$\frac{૧}{૨}$" = कप છે).

(૧૨). ૧.૭" બાજુવાળો એક સમબાજુ अबक △ દોરો. अक ∥ पल, अक થી .૯" ને અંતરે દોરો. આ સમાન્તર अब, बक ને प, ल માં છેદે છે. ત્યારે बल, लक પાયાના બે ભાગ છે. માપ લેવાથી बल = .૬" અને लक = ૧.૧" છે.

(૧૩). ∠अकबને कप થી દુભાગો. હવે ∠अकब ને कप દુભાગે છે, ∴ कप નું કોઇપણ બિંદુ कअ, कब થી સરખે અંતરે છે તેથી कप જો

अब ને प માં છેદે તો प જે अब ઉપર છે તે कअ, कब થી સમાન અંતરે છે. વળી ∠ब = ∠अकब = ૨ ∠अ. ∴ ∠अ = ∠पकअ. ∴ अप = पक. અને ∠बपक = ∠अ + ∠पकअ = ૨ ∠अ = ∠ब. ∴ पक = बक.

(૧૪). શિરોબિંદુ ખૂણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને જે બિંદુમાં છેદે તે બન્ને બાજુથી સમાન અંતરે છે.

(૧૫). अब = ૪" વ્યાસ ઉપર એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં डक જ્યા अब સમાન્તર દોરો अब, डक એ સમાન્તરોની વચ્ચેના અંતરને ल માં દુભાગી ल માંથી अब (કે डक) ‖ पलर લીટી દોરો. ત્યારે अब, पलर, डक સમાન્તરો છે. અને अब, परનું અંતર पर, डकના અંતર બરાબર છે. ∴ पर માગેલું નિધાન છે.

(૧૬). ∠बअकને अडથી દુભાગો. अड જો વર્તુળને डમાં મળે તો ड, अब, अकથી સમાન અંતરે છે.

(૧૭). कअને प સુધી લંબાવો. ∠बअपને अरथी દુભાગો. જો अर, વર્તુળને रમાં મળે તો र બિંદુ अब વ્યાસ અને कअ લંબાવેલી લીટીથી સમાન અંતરે છે.

(૧૮). अडને पમાં દુભાગી बक ‖ पल દોરો. अलर બીજી કોઇ પણ લીટી बक સુધી દોરો. ∵ पल ‖ डर અને अप = पड, ∴ अल = लर. એજ પ્રમાણે अમાંથી बक સુધી કોઇ પણ લીટી દોરીએ તો તેનું મધ્યબિંદુ पल ઉપર છે. તેથી पल માગેલું નિધાન છે.

---

§ ૨૪. થોડાક પ્રશ્નોની સિદ્ધતા ઉપરના.

(૧). अમાંથી पक ⊥ अपभ દોરો. अप = पभ કરો અને बમાંથી रव ⊥ बवल દોરી बव = वल કરો. भल સાંધો. भल જો पकને डમાં અને रवને इમાં મળે તો ड, इ માંગેલાં બિંદુ છે. अड, इब સાંધો. पक માં કોઇ म બિંદુ લો. अम, भम, मइ, સાંધો ત્યારે अम + मइ = भम + मइ > भइ. ∴ अम + मइ + इब > भइल એટલે > अड + डइ + इब. ∴ अड + डइ + इब ન્યૂનતમ છે

(૨). अમાંથી बक ઉપર अड લંબ દોરો. बक ઉપર डब = डक કરો अब, अक સાંધો. ત્યારે △ अबड ≡ △ अकड. ∴ ∠ब = ∠कछे.

(૩). रफ, कप, टव ત્રણ લીટી લો, अમાંથી कप ઉપર લંબ દોરી अक = कड (લંબ ઉપર) કરો बમાંથી रफ ઉપર લંબ દોરી (લંબ ઉપર)

बफ = फइ કરો. बમાંથી टव ઉપર લંબ દોરી (લંબ ઉપર) बव = वल કરો. इड સાંધો. આ इड લીટી कपને पમાં અને रफને रમાં છેદે છે रल, टवને टમાં છેદે તેમ, સાંધો. अप, पर, रट, टव સાંધો. ત્યારે अपरटब ત્રણે લીટીઓને મળતો अ, बની વચ્ચે ટુંકામાં ટુંકો રસ્તો છે. હવે कपના प સિવાયના કોઇ પણ બિંદુને अ, र સાથે સાંધીએ તો એ અંતરો મળી अप + पर થી મોટાં છે. તેમજ टव ઉપર કોઇ પણ બિંદુ (ट સિવાયનું) र, ब સાથે સાંધીએ તો તે અંતરો મળી रट + टव થી મોટાં છે. માટે अपरटब માર્ગ ટુંકામાં ટુંકો છે.

(૪). कडની વિરૂદ્ધ બાજુએ अ,ब લો. कड ઉપર अक લંબ દોરી अक = कइ કરો. इब સાંધી લંબાવી कडને डમાં મળવા દો. ત્યારે ड માંગેલું બિંદુ છે. कडમાં કોઇ બીજું ल બિંદુ લો. अल, बल, इल સાંધો. अड – बड = इड – बड = इब. અને अल – लब = इल – बल < इब (પ્ર. સિ. ૧૮ પ્રશ્ન ૨) ∴ अड – बड મહત્તમ છે.

(૫). अब, अक એ આપેલી લીટી છે ધારો કે તેઓ अ માં છેદે છે. इ,प એ આપેલાં બિંદુ છે. ∠बअक ને अल થી દુભાગો અને इप સાંધી તેને डल થી કાટખુણે દુભાગો. अल, डल બન્ને ल માં મળે છે. હવે अल નું દરેક બિંદુ अब, अक થી સમાન અંતરે છે અને डल નું દરેક બિંદુ इ,प થી સમાન અંતરે છે તેથી ल માંગેલું બિંદુ છે. જો अब ∥ अक હોય તો તેઓથી સમાન અંતરે રહેતાં બિંદુનું નિધાન रल દોરો. रल, डल, ल માં મળે તો ल માંગેલું બિંદુ છે.

(૬). આપેલી ત્રણ લીટીમાંથી अब, बक, ब માં મળે છે, અને बक, कड, क માં મળે છે ∠अबक ને बल થી અને ∠बकड ને कल થી દુભાગો. ત્યારે ल માગેલું બિંદુ છે. જો ત્રણે લીટીઓ સમાન્તર હોય તો કૃત્ય અશક્ય છે.

(૭). જુઓ કૃત્ય સિધ્ધાંત ૧ નો પ્રશ્ન ૧૨ મો.

(૮). જુઓ ઉપરના પ્રશ્ન ૬ અને ૭ પ્રશ્ન ૬ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદર એવું એક બિંદુ છે. અને પ્રશ્ન ૭ પ્રમાણે બહારના બે બે અને અંદરના સામેના શિરોબિંદુ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુગામી છે. માટે ત્રિકોણનો એક અંતર્લગ્ન વર્તુળ અને બહારના ત્રણ ઉપલગ્ન વર્તુળો છે.

(૯). જુઓ પ્રમેય સિદ્ધાંત ૧૯ મો.

(૧૦). જુઓ પ્રમેય સિદ્ધાંત ૨૦ મો.

(૧૧). अडक $\triangle$, अडब $\triangle$ માં अड સામાન્ય છે, डक = डब અને अड > अब, ∴ ∠अडक > ∠अडब (પ્ર૦ સિ૦ ૨૦). પણ ∠अडक + ∠अडब = ૨ $\lfloor$. ∴ ∠अडक > ૧ $\lfloor$ છે.

(૧૨). ∠अ કાટખુણો હોય ત્યારે अड = ½ बक (જુઓ કૃ. સિ. ૧૦). बक વ્યાસ ઉપર અર્ધ વર્તુળ દોરી डअ ને લંબાવી એ અર્ધ વર્તુળને ल માં મળવા દો. ત્યારે बलक કાટખૂણ ત્રિકોણ છે અને लड = ½ बक (જુઓ કૃ. સિ. ૧૦). પણ लड > अड ∴ अड < ½ बक. એજ પ્રમાણે સાંકડો ખુણો હોય છે ત્યારે अड > ½ बक. (સાંકડખૂણ ત્રિકોણ $\triangle$માં કાટખુણ $\triangle$ રહેશે અને કાટખુણ $\triangle$ માં પહોળખુણ $\triangle$ રહેશે.)

(૧૩). अड = बड = डक; ∴ ∠ब + ∠क = ∠अ. ∴ $\triangle$अबक કાટખુણ $\triangle$ છે. डअને લંબાવી डइ લો. ∴ डइ > ½ बक. પણ बइक $\triangle$ની અંદર बअक $\triangle$ છે. ∴ ∠बइक < ∠बअक. ∴ $\triangle$बइक સાંકડ ખુણ છે. અને એજ પ્રમાણે પહોળખુણ $\triangle$ને માટે પણ સિદ્ધતા છે.

(૧૪). अबक $\triangle$માં अड મધ્યગા છે. अडને લંબાવી अड = डइ કરો. कइ સાંધો. હવે अबड $\triangle$ અને इकड $\triangle$માં अड = डइ, बड=कड અને ∠अडब = ∠इडक, ∴ अब = कइ. અને अक + कइ > अड + डइ ∴ अक + अब > ૨ अड. ∴ ½ (अक + अब) > अड છે.

(૧૫). પ્રશ્ન ૬ અને પ્રશ્ન ૮ માં ત્રણ બિંદુઓમાંથી બબ્બે સાંધીએ તો એક ત્રિકોણ થાય છે. અને જે બિંદુ એ ત્રણે બિંદુઓથી સરખે અંતરે છે તે ત્રિકોણના પરિલગ્ન વર્તુળનું મધ્યબિંદુ છે.

(૧૬). જુઓ પ્રશ્ન ૧૫.

(૧૭). अबकड ચતુષ્કોણની अब, बक, कड, डअ બાજુનાં इ, फ, ल, र અનુક્રમેઃ મધ્યબિંદુ છે, इफ, फल, लर, रइ, अक, बड સાંધો હવે इफ ‖ अक અને रल ‖ अक. તેમજ रइ ‖ बड ‖ लफ. ∴ इफलर સ. ચ. છે.

(૧૮). अबकड ચતુષ્કોણમાં अडનું प, અને बकનું ल મધ્યબિંદુ છે અને अकનું इ, અને बडનું फ મધ્યબિંદુ છે. पइ, पफ, लइ, लफ સાંધો હવે अबड $\triangle$માં पफ ‖ अब. અને अकब $\triangle$માં इल ‖ अब. ∴ पफ ‖ लइ. તેમજ लफ ‖ पइ. ∴ पफलइ સ. ચ. છે. એજ પ્રમાણે अब, कडનાં र, ट મધ્યબિંદુ હોય તો रफटइ પણ સ. ચ. છે.

(૧૯). अब ને प માં દુભાગો. ત્યારે पड ∥ अक છે. ∴ ∠पडब ૧ કાટખુણો છે. અને पब = ½ अब અને इब = ½ अब. ∴ इ બિંદુ पब નું મધ્યબિંદુ છે. ∴ पडब કાટખુણ △માં डइ = इप = इब છે.

(૨૦). આપેલી આકૃતિમાં फइ ∥ बक છે. अब નું મધ્યબિંદુ फ છે. જો इ, अक નું મધ્યબિંદુ ન હોય તો ધારો કે प, अकનું મધ્યબિંદુ છે. ત્યારે फप ∥ बक છે પણ फइ ∥ बक છે. એટલે કે फइ, फप બન્ને ∥ बक. પણ એ અશક્ય છે તેથી इ, अक નું મધ્યબિંદુ હોવુંજ જોઇએ. એજ પ્રમાણે अब, बक બાજુઓને માટે પણ સમજવું.

(૨૧). આપેલી આકૃતિમાં; अफडइ, बडइफ અને कइफड દરેક સ૦ ચ૦ છે. અને એ બધામાં डफइ △ સામાન્ય છે. ∴ △ अफइ ≡ △ बफड ≡ △ कइड ≡ △ डफइ છે.

(૨૨). अबकड સ૦ ચ૦ નાં શિરોબિંદુમાંથી टर લીટી ઉપર अप ∥ बर ∥ कल ∥ डट દોરો. જો अप, बर નાની સમાન્તરો હોય તો डट ઉપર टप ∥ अम અને लर ∥ बइ દોરો. अपटम અને बरलइ સ૦ ચ૦ છે. ∴ मट = अप અને बर = इल. ∴ मड = इक બતાવવી જોઇએ. હવે अमड △ અને बइक △ માં अम ∥ बइ, अड ∥ बक અને मड ∥ इक છે. ∴ ∠मअड = ∠इबक, ∠म = ∠इ, અને વળી अड = बक. ∴ मड = इक છે. ∴ टड + बर = टम + मड + बर = अप + इक + इल = अप + कल છે.

(૨૩). अबकड સ૦ ચ૦ ના अक, बड કર્ણ म માં છેદે છે અને म તેઓનું મધ્યબિંદુ છે. पर, लट મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી છે. ત્યારે अप ∥ = डर, ∴ अड ∥ पर છે અને अडक △માં अड ∥ रप અને र, डक નું મધ્યબિંદુ છે, ∴ रप, अक ને म માં છેદે છે. તેમજ लट પણ बड ને म માં છેદે છે. ∴ સામસામેના મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ કર્ણના મધ્યબિંદુમાંથી જાય છે.

(૨૪). डब સાંધો. ત્યારે अबड △ માં डइ મધ્યંગા છે; અને म, डब નું મધ્યબિંદુ હોય અને डइ, अम ને प માં છેદે તો अम પણ મધ્યગા છે, ∴ अम, डइ, प માં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. ∴ अप = ૨ पम તેજ પ્રમાણે જો बफ, अक ને ट માં છેદે તો कट = ૨ टम. પણ अम = मक. ∴ अप = पट = टक છે.

(૨૫). बक સાંધી इफ ને म માં મળવાદો. ત્યારે अबक △ માં अक ∥ इम, अइ = इब, ∴ कम = मब છે. વળી कम = मब, અને कफ = फड, ∴ बकड △ માં मफ ∥ बड છે. ∴ बड ∥ इमफ ∥ अक છે.

(૨૬). अबकड ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સાંધવાથી થતો इफलर સ૦ ચ૦ છે. હવે अबड △ માં रइ ‖ डब. ∴ अरइ △ = ¼ △ अडब. અને એજ પ્રમાણે कलफ △ = ¼ △ कडब. ∴ अरइ △ + कलफ △ = ¼ આપેલો ચતુષ્કોણ અને એજ પ્રમાણે डरल △ + बफइ △ = ¼ આપેલો ચતુષ્કોણ. ∴ इफलर સ૦ ચ૦ ની બહારના ચાર △ ઓ મળી આખા अबकड ચતુષ્કોણથી અર્ધા છે. ∴ इफलर સ૦ ચ૦ પણ અર્ધો છે.

(૨૭). फइ ‖ बक છે; અને गबक △ લેતાં रल ‖ बक છે. વળી फइ = ½ बक, અને रल = ½ बक; ∴ फइ ‖ = रल. ∴ फइलर સ૦ ચ૦ છે. ∴ તેના કર્ણો फल, रइ અરસપરસ ग માં દુભાગે છે. ∴ इग = गर; પણ गर = रच. ∴ बइ મધ્યગા ग માં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. તેમજ कफ મધ્યગા ग માં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે. એજ પ્રમાણે अगड, बगइ મધ્યગાઓ લઇ સિદ્ધતા આવી શકે છે. ∴ ત્રણે મધ્યગાઓ એક બિંદુગામી છે, અને દરેક તેજ બિંદુમાં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે.

(૨૮). ૨૪ મા પ્રકરણમાં સમજાવેલો પાંચમો પ્રશ્ન જુઓ.

(૨૯). बम, इड, अकને ल, रમાં છેદે છે હવે मड ‖ = बइ, ∴ मब ‖ डइ. વળી अडर △માં मल ‖ डर, અને अम = मड, ∴ अल=लर; તેમજ लर = रक; ∴ अल = लर = रक છે (અથવા જુઓ ઉપર પ્રશ્ન ૨૪ મો.)

(૩૦). पर જો बडને मમાં દુભાગે તો अप = पब, डम = मब, ∴ अड ‖ पम છે. તેમજ रम ‖ कब છે. ∴ अड ‖ पमर ‖ बक છે.

(૩૧). अब લીટીનું म મધ્યબિંદુ છે. डफइ કોઇ પણ લીટી છે. અને તેના ઉપર अड ‖ मफ ‖ बइ દોરી છે. अमांથी अमब ‖ अलर દોરી છે અને તે मफને लમાં અને बइને रમાં છેદે છે. હવે अड = लफ = रइ છે. હવે डइ જો આપેલી अबને છેદતી હોય તો फम = फल – मल=अड – ½ बर = अड – ½ बइ – ½ इर = ½ अड – ½ बइ = ½ (अड – बइ); ∴ अड – बइ = २ फम છે. જો डइ આપેલી લીટી अबને છેદતી ન હોય તો बर = २ मल છે. ∴ अड + बइ = अड + रइ + बर = २ लफ + २ मल = २ मफ છે.

§ ૨૬ પ્રથમ ભાગના પરચુરણ પ્રશ્નો.

(૧). **अबक** △ સમદ્વિબાજુ છે. અને **अड** લીટી ∠**बअक**ને દુભાગે છે. ∴ **अबड** ખૂણો **बअड** ખૂણાનો એક કાટખૂણ પૂર્ણી છે. પણ ∠**बअड** = ૪૦° છે. ∴ ∠**ब** = ૫૦° છે. વળી ∠**अडब** એક કાટખુણો છે. તેથી તેનો એક કાટખુણ પૂર્ણી ખૂણો નથી. અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો ∠**अडक** છે. કે જે ખૂણો એક કાટખૂણો કે ૯૦° છે.

(૨) ૨૪ મા પ્રકરણના ૨૮ મા પ્રશ્ન પ્રમાણે બહારના ત્રિકોણની બાજુઓ આપેલા ત્રિકોણની સામેની બાજુથી બમણી છે; અને આપેલો ત્રિકોણ સમબાજુ છે; માટે બહારનો ત્રિકોણ પણ સમબાજુ છે.

(૩). **अबक** અને **डबक** ત્રિકોણો **बक** પાયા ઉપર છે. **अड**ને સાંધો **बक**ને **म**માં મળવા દો. હવે **अबड** △ અને **अकड** △માં **अब** = **अक**, **डब** = **डक**, અને **अड** સામાન્ય છે. ∴ ∠**बअड** = ∠**कअड** છે. વળી **अबम** △ અને **अकम** △ માં **अब** = **अक**, ∠**अबक** = ∠**अकब**, અને ∠**बअम** = ∠**कअम**; ∴ **बम** = **कम** અને ∠**अमब** = ∠**कमब** = ૧ કાટખૂણો છે.

(૪). **अक**, **बड** ને **म** માં છેદવા દો. હવે **अबक** △, ને **डबक** △ માં **अब** = **डक**, **अक** = **डब**, **बक** સામાન્ય છે. ∴ ∠**अकब** = ∠**डबक**. અને એજ પ્રમાણે ∠**अडब** = ∠**डअक**. વળી **अमड** △, **बमक** △ માં ∠**अमड** = ∠**बमक**; અને બાકીના બન્ને ખુણા સરખા છે. ∴ ∠**डअक** = ∠**अकब**. ∴ **अड** ‖ **बक** છે.

(૫). **बक** પાયાના **मड** દુભાગનાર લંબ ઉપરનું કોઇ પણ બિંદુ **ब**, **क** થી સમાન અંતરે છે. માટે **ल** જેવું કોઇ પણ બિંદુ એ **मड** ઉપર હોય તો **लबक** △ સમદ્વિબાજુ છે. અને **लम**, તેના ∠**बलक** ને દુભાગે છે.

(૬). ∠**अबक** = ૬૧°નો બનાવો. **बक** = ૩·૭″ કાપો અને **बअ** = ૪·૧″ કાપો. **अक** સાંધો. ત્યારે **अबक** △ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૭). **अपड**, **बमक** △ઓમાં **अड** = **बक**, **अप** = **मक**, અને ∠**पअड** = ∠**मकब**, ∴ ∠**अपड** = ∠**बमक**. અને **पड** = **मब**. અને ∴ **मड** ‖ = **मब**. ∴ **बपडम** સ. ચ. છે.

(૮). **अड**, **बक** વિષમબાજુનાં **इ**, **फ** મધ્યબિંદુ છે. **इफ** સાંધો. એમાંથી **अड** ‖ **बक** દોરી **अल**ને **म**માં દુભાગો. તેથી **अबकल** સ. ચ.

છે; ∴ मफ ‖ लक છે. અને વળી अडल △માં इम ‖ डल છે. ∴ इमफ એકજ લીટી હોઇ इक સમાન્તર છે.

(૯). डम, इम લંબોને मમાં મળવા દો. मफ સાંધો. ત્યારે मफ ⊥ अक થશે. डम, अबની દુભાગનારી લંબ લીટી છે, ∴ मअ = मब; અને તેજ પ્રમાણે मब = मक. ∴ मअ = मक. ∴ म, अकની દુભાગનારી લંબ લીટી ઉપર પણ છે. ∴ मफ ⊥ अक છે. ∴ ત્રણે લંબ એક બિંદુગામી છે.

(૧૦). अब ‖ = डक; અને अब ‖ = मप. ∴ डक ‖ = मप. ∴ कडमप પણ સ. ચ. છે.

(૧૧). કોઇ પણ ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધવાથી થતો ચતુષ્કોણ ‖ કોણ છે, કારણ કે એ નવા ચતુષ્કોણની બાજુઓ આપેલા ચતુષ્કોણના કર્ણની સમાન્તર છે.

(૧૨). પ્રશ્ન ૧૧ પ્રમાણે મધ્યબિંદુઓને સાંધવાથી થતો ચતુષ્કોણ સ. ચ. છે. અને આપેલા ચતુષ્કોણની બાજુઓનાં સામ સામેનાં મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટીઓ એ નવા સ. ચ. ના કર્ણો છે. માટે તે અરસપરસ દુભાગે છે. આ સત્ય કોઇ પણ ચતુષ્કોણને લાગુ પડે છે.

(૧૩). अबक △માં अब = अक, અને म, बकનું મધ્યબિંદુ છે. अम સાંધો. ત્યારે अबम, अकम △ઓમાં ત્રણે બાજુઓ અનુક્રમે બરાબર છે. ∴ ∠अमब = ∠अमक = ૧ ∟ છે અને ∠बअम = ∠कअम છે.

(૧૪). अड સાંધો. अबड △ ≡ अकड △; ∴ ∠अबड = ∠अकड છે.

(૧૫). बक પાયા ઉપર बप = कम કરો अप, अम સાંધો. अबप △ અને अकम △ઓમાં अब = अक. ∠ब = ∠क, અને बप = कम. ∴ अप = अम છે.

(૧૬). ત્રિકોણની બબ્બે બાજુનાં મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુથી અર્ધી છે. માટે મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી મળતી ત્રણે લીટીઓ આપેલા ત્રિકોણની બાજુથી અર્ધી છે. અને આપેલો ત્રિકોણ સમબાજુ છે માટે નવો ત્રિકોણ પણ સમબાજુ છે.

(૧૭). ब = ∠ब′ = ૩૭° કરો. बअ = ब′अ′ = ૫.૯″ કાપો. अ, अ′ મધ્યબિંદુઓ લઇ ૬.૭″ની ત્રિજ્યાથી એકેક વર્તુળ દોરો કે જે बक, ब′क′ને क, क′ માં મળે. આ વર્તુળો बक, ब′क′ ને બબ્બે બિંદુઓમાં મળે છે, કારણ કે अक કે अ′क′ > ૫.૯″ છે. ∴ ત્રિકોણો અનિશ્ચિત છે

(૧૮). ∠अमक = ૧૧૨° નો કરો म મધ્યબિંદુ લઇ ૩.૫″ની ત્રિજ્યા લઇ એક વર્તુળ દોરી अलक ક્રોસ કરો अक સાંધો. म માંથી अक ઉપર

લંબ દોરી આ લંબને લંબાવી કોંસને ल માં મળવા દો. ત્યારે ल કોંસનું મધ્યબિંદુ છે. (સિદ્ધતા ભારી છે, માટે આપી નથી).

(૧૯). अक = अब, अफ = अइ; ∴ फक = इब. અને फबक △, इकब △માં फक = इब, बक સામાન્ય છે અને ∠अकब = ∠अबक છે. ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ फब = इक છે.

(૨૦). अबक △માં अब = अक. बअने इ સુધી લંબાવી अमांથી बक ‖ अड દોરો. अड ‖ बक, ∴ ∠डअइ = ∠ब અને ∠डअक = ∠क છે. પણ ∠ब = ∠क ∴ अड લીટી બહારના ∠अने દુભાગે છે.

(૨૧). अबक △માં अब = अक. અને બહારના ∠ब, ∠कને बड, कड દુભાગે છે. હવે ∠अबक = ∠अकब, ∴ બહારનો ∠ब = બહારનો ∠क. અને बड, कड આ ખુણાઓને દુભાગે છે, ∴ ∠डबक = ∠डकब. ∴ डक = डब; ∴ डबक △ સમદ્વિબાજુ છે.

(૨૨). ૩·૧"ની ત્રિજ્યાનો કોઈ પણ अबक વર્તુળ દોરો. अ મધ્યબિંદુ લઇ ૩·૧"ની ત્રિજ્યાના વર્તુળથી अबक વર્તુળને बમાં છેદો. એજ પ્રમાણે ब, क, ड, इ, फમાં પણ મૂળ વર્તુળને છેદો. अबकडइफ સાંધો. ત્યારે अबकडइफ સમષટ્કોણ છે અને તેના બધા ખુણા સરખા છે. માટે દરેક ખુણો (૨ × ૬ − ૪) ÷ ૬ કાટખુણ = $\frac{૪}{૩}$ કાટખુણા છે. માપીને ખાત્રી કરો.

(૨૩). अ બરાબર આપેલા લંબની લંબાઈ લો. बकथी अ ઉંચાઇએ – अ અંતરે कब ‖ डइफ દોરો. डक, डब સાંધો. ત્યારે डकब માગેલો △ છે. તેજ પ્રમાણે इकब, फकब, વગેરે △ઓ પણ માગેલાં △ઓ છે. માટે અનહદ ત્રિકોણો થઇ શકે છે.

(૨૪). अब દિવાલ ઉભી દોરો. अ પાયાથી ક્ષિતિજની લીટી ઉપર अक = ૨·૩" દોરો. क મધ્યબિંદુથી ૪·૧"ની ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો કે જે अब દિવાલને बમાં છેદે. વળી अड = ૨·૭" દોરો અને વર્તુળ દોરી अब દિવાલને इમાં છેદો. ત્યારે बइ બારીની ઉંચાઇ છે. बइ = ·૪૫" = ૪$\frac{૧}{૨}$ ફુટ છે.

(૨૫). अडक △, फइक △માં अक = कइ, ∠अकड = ∠फकइ, અને ∠ड = ∠फ છે. ∴ अड ‖ = फइ. ∴ बक ‖ = फइ; ∴ बक ‖ = कइ; ∴ बक ‖ = अक. ∴ अबफक સ. ચ. છે.

(૨૬). ૬૩૫ વાર. કોણઅંતર ૨૭° છે. સ્કેલ ૧" = ૧૦૦ વાર લેવું સારૂં છે.

(૨૭). अब ક્ષિતિજ સમાન્તર લો. અને अक કાટખુણે લો. अब = ૩૦′ = ૩.૦″ કાપો અને ∠अबक = ૪૨° કરો. बक જો अकને कમાં મળે તો बकની દિશામાં સૂર્ય છે અને अक કાઠીની ઉંચાઈ છે. ∴ કાઠી ૨.૭″ = ૨૭ ફુટ ઉંચી છે.

(૨૮). સ્કેલ ૧૦૦ વાર = ૧″ લો. अड = ૪૧૮ વાર છે અને કોણુ અંતર ૪૪° છે.

(૨૯). अइय △, कफग △માં अइ = कग, अय = कफ અને ∠अ = ∠क; ∴ ∠य = ∠फ; પણ अय ∥ कफ, ∴ यइ ∥ = गफ, ∴ इफगय સ. ચ. છે.

(૩૦). अब = अक, ∴ ∠अबक = ∠अकब; ∴ ∠बकफ = ∠कबइ. ∴ △ फबक ≡ △ इकब. ∴ फब = इक છે. ∴ अफ = अइ છે. ∴ ∠अफइ = ∠अइफ. ∴ ∠अइफ = ∠अकब. ∴ इफ ∥ कब છે.

(૩૧). बड, अक સાંધો. अबक △ ≡ डकब △ છે. ∴ अक = डब છે. ∴ अबड △ ≡ अडक △ છે. ∴ ∠बअड = ∠कडअ છે. ∴ ∠अबक + ∠बअड = ∠बकड + ∠कडअ = ૨ ⌊ છે. ∴ बक∥अड છે.

(૩૨). अबकड સમદ્વિબાજુ ટ્રાપિઝ્યમમાં अब ∥ डक અને अड = बक. જો अब > डक તો बक ∥ अइ લીટી डकને इમાં મળે તેમ દોરો. ત્યારે अबकइ સ. ચ. છે. ∴ बक = अइ = अड. ∴ ∠अइड = ∠ड અને ∠अइड = ∠क ∴ ∠क = ∠ड. વળી अडक, बडक ત્રિકોણોમાં अड = बक, डक સામાન્ય છે અને ∠ड = ∠क, ∴ अक કર્ણ = बड કર્ણ છે.

(૩૩). જુઓ ઉપલા પ્રશ્નમાંની સિદ્ધતા.

(૩૪) પ્રશ્ન ૩૨ પ્રમાણે આકૃતિ દોરી તેમાં अड, बक નાં ल મધ્યબિંદુ લો. अइ નું र મધ્યબિંદુ લો ત્યારે अबकइ સ૦ ચ૦ છે, ∴ रल ∥ इक છે. અને पर ∥ डइ છે. ∴ परल ∥ डइक છે. અને अब = रल = इक; અને पर = ½ डइ. ∴ पल = पर + रल = ½ डइ + ½ (अब + डक) = ½ (अब + डक) છે.

(૩૫). ∠अ = ∠ब અને ∠क = ∠ड અને ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड = ૪ ⌊ ∴ ∠अ + ∠ड = ∠ब + ∠क = ૨ ⌊ ∴ अब ∥ डक અને પ્રશ્ન ૩૧ ની સિદ્ધતા પ્રમાણે अबकड સમદ્વિબાજુ ટ્રાપિઝ્યમ છે. ∴ अड = बक છે.

(૩૬). લંબ ચોરસના કર્ણો બરાબર છે અને બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને અનુક્રમે સાંધવાથી થતી લીટીઓ આ કર્ણોની સમાન્તર છે અને કર્ણોથી અર્ધી છે માટે આ લીટીઓથી બનતો ચતુષ્કોણ રોમ્બસ છે.

(૩૭). સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેનાં બાજુ અને ખૂણા બરાબર છે માટે બે સ૦ ચ૦માં જો બે પાસેપાસેની બાજુ અને અંતર્ખૂણો બરાબર હોય તો ચતુષ્કોણો એક બીજા ઉપર મુકતાં બરાબર સ્થાનોપરિસ્થિતિથી મળી જશે.

(૩૮) ∠अ = ∠इ છે માટે એક ચતુષ્કોણને બીજા ઉપર ∠अ ને ∠इ ઉપર મુકતાં **अब**, **इफ** ઉપર અને **अड**, **इय** ઉપર બરાબર મળી જશે. માટે **बड**, **फय** ઉપર મળી જશે માટે **बकड** △, **फगय** △ ઉપર બરાબર મળી જશે માટે એક ચતુષ્કોણ બીજા ઉપર પણ બરાબર મળી જશે.

(૩૯). **अबकड** સ૦ ચ૦ માં **अक** નું **म** મધ્યબિંદુ છે. **म** માંથી **अब**, **कड** સુધી **इमल** કોઇ પણ લીટી દોરો. ત્યારે **अमइ** △, **कमल** △ માં **अम** = **कम**, ∠**इअम** = ∠**लकम** અને ∠**अमइ** = **लमक** છે. ∴ **मइ** = **मल** છે. એજ પ્રમાણે બીજી કોઇ પણ લીટીના **म** આગળ બે સમાન ભાગ થાય છે.

(૪૦). **अब**, **अक** નાં **फ**, **इ** મધ્યબિંદુ છે; ∴ **फइ** ∥ **बक** છે. તેમજ **गब**, **गक** નાં **य**, **ड** મધ્યબિંદુ છે. માટે **यड** ∥ **बक** છે. ∴ વળી **फइ** = ½ **बक** = **यड** છે ∴ **फइ** ∥ = **यड**; ∴ **यडइफ** સ૦ ચ૦ છે.

(૪૧). **बक** ∥ **इफ** અને **बफ** = **कइ**; ∴ **बफइक** સ૦ ચ૦ છે. **बफ** ∥ = **कइ** અને ∴ **बफ** ∥ = **अक** ∴ **अकफब** સ૦ ચ૦ છે. એટલે **ब** માંથી **अक** ∥ દોરેલી **बफ** લીટી **इफ** ને જે બિંદુમાં **डक** મળે છે તેજ બિંદુમાં મળે છે

(૪૨). **अबकड** સ૦ ચ૦ માં **बड** ઉપર **अम**, **कल** લંબ દોરી છે. હવે **अमड** △, **बलक** △ માં **अड** = **बक**, ∠**अडम** = ∠**कबल** અને ∠**म** = ∠**ल**; ∴ **अम** = **कल**

(૪૩). **अब** ∥ **डइ** અને **बक** ∥ **इफ**. ∴ ∠**अबक** = ∠**डइफ** છે. ∴ **अबक** △ ≡ **डइफ** △ છે. ∴ **अक** = **डफ** છે. વળી ∠**क** = ∠**फ** છે અને **बक** ∥ **इफ** ∴ **अक** ∥ **डफ** છે.

(૪૪). **अबकड** આપેલા પક્ષ પ્રમાણે સમદ્વિબાજુ ટ્રાપિઝ્યમ છે. ∴ ∠**ड** = ∠**क** અને ∠**अ** = ∠**ब** અને **अक** = **बड**. વળી ∠**अ** + ∠**ब** + ∠**क** + ∠**ड** = ૩૬૦° ∴ ∠**अ** + ∠**क** = ∠**ब** + ∠**ड** = ૧૮૦° છે.

(૪૫). अप, बक મૂળ સ્થિતિ હોયતો, કારણકે अप, बक એકજ વેગથી એકજ દિશામાં જાય છે તેથી, अप, અને अ' पની વચ્ચેનો ખુણો = बक અને बक'ની વચ્ચેનો ખુણો અને આ મળતા આવતા ખુણા છે. માટે હંમેશાં अप, बक સળીઆ સમાન્તર રહેશે. કોઈ પણ સ્થિતિમાં अ'क' સાંધો. ત્યારે अप ‖ बक અને पअ' ‖ बक' છે, ∴ पअबक' સ. ચ. છે. ∴ अ'क', पब અરસપરસ દુભાગે છે. ત્યારે अ'क' એટલે अक હંમેશાં पकના મધ્યબિંદુમાંથી જાય છે અને આ બિંદુ સ્થિર છે કારણ કે पबની સ્થિતિ મુકરર છે.

(૪૬). બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર છે. અને એ સરવાળો અંદરના ખુણાના સરવાળા બરાબર છે. માટે અંદરના ખુણાઓ મળી ચાર કાટખુણા છે. અને અંદરના ખુણાઓ ચાર કાટખુણા હોય તો તેની ચાર બાજુ હોવી જોઇએ કારણ કે ૨ અ − ૪ = ૪ છે, ∴ અ = ૪ બાજુ છે.

(૪૭). માંહેનો ∠अ = ૨° હોય તો બહારનો ∠अ = ૩° છે. અને માંહેનો ∠अ + બહારનો ∠अ = ૧૮૦° છે. તેથી માંહેનો ∠अ ૧૮૦° ÷ (૨ + ૩) × ૨ = ૩૬ × ૨ = ૭૨° છે. ∴ ∠ब + ∠क = ૧૮૦° − ૭૨° = ૧૦૮° છે. અને ∴ ∠ब + ∠क = ૧૦૮° છે. વળી ૪ ∠ब = ૫ ∠क ∴ ∠ब જો ૫° હોય તો ∠क ૪° છે. ∴ ∠ब = ૧૦૮ ÷ ૯ × ૫=૬૦° છે અને ∠क = ૧૦૮ ÷ ૯ × ૪ = ૪૮° છે.

(૪૮). સમબહુકોણનાં અંદરના ખુણા બધા સરખા છે, તેમજ બહારના પણ સરખા છે. વળી બહારના બધા ખુણા મળી ચાર કાટખુણા છે. માટે પહેલા સમબહુકોણમાં ૩૬૦ ÷ ૧૫ = ૨૪ બાજુ છે. બીજામાં ૩૬૦ ÷ ૩૦ = ૧૨ બાજુ છે. ત્રીજામાં ૩૬૦ ÷ ૪૦ = ૯ બાજુ છે. અને ચોથામાં ૩૬૦ ÷ ૧૨ = ૩૦ બાજુ છે.

(૪૯). કોઈપણ ત્રિકોણમાં બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુને જોડનારી લીટી પાયાને સમાન્તર છે. માટે △માં अब, अकનાં ड, इ મધ્યબિંદુ ને સાંધનારી લીટી डइ ‖ बक છે. अમાંથી बक સુધી अमफ લીટી ડઇને मમાં છેદે તેમ દોરો. ત્યારે अबफ △માં डम ‖ बफ છે અને डम, अबને દુભાગે છે; ∴ તે अफ ને પણ દુભાગે છે.

(૫૦). अबकड સ૦ ચ૦નાં શિરોબિંદુઓમાંથી मर કોઇપણ લીટી ઉપર अप, बर, कल, डम લંબ દોરી છે. ब માંથી कल ⊥ बइ દોરો અને अ માંથી डम ⊥ अफ દોરો. ∴ अप = फम અને बर = इल છે. વળી बइक △ અને अफड △માં ∠इ = ∠फ, बक = अड અને ∠बकइ =

∠अडफ છે. ∵ बक ∥ अड અને कल ∥ डम છે. ∴ Δઓ સર્વસમાન છે ∴ कइ = डफ છે. ∴ अप + कल = फम + इल + कइ = फम + बर + डफ = डम + बर છે.

(૫૧). अबक સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના बक પાયાના म માંથી अब, अक સરખી બાજુ ઉપર मफ, मइ લંબ દોરો. ब માંથી अक ∥ बल દોરી इम ને ल માં મળવા દો. ब માંથી कअ ઉપર बर લંબ દોરો. હવે मबफ અને मबल Δઓમાં मब સામાન્ય છે, ∠फ = ∠ल અને ∠मबफ = ∠मबल (= ∠क), ∴ मफ = मल. વળી बर ∥ लइ અને बल ∥ रइ; ∴ बर = लइ. માટે मफ + मइ = मल + मइ = लइ = बर = ब માંથી अक ઉપર દોરેલી લંબ છે.

(૫૨). अबक સમબાજુ Δ માંહેના म બિંદુમાંથી બાજુ ઉપર मड, मइ, मफ લંબ દોરો म માંથી बक ∥ पमर દોરો. ત્યારે मफ + मइ = प માંથી अर ઉપર દોરેલી લંબ અને प માંથી बक ઉપર દોરેલી લંબ = मड છે અને प માંથી अक, बक ઉપર દોરેલી લંબ મળી ब માંથી अक ઉપર લંબ બરાબર છે (ઉપરનો પ્રશ્ન). ∴ मफ + मइ + मड = ब માંથી अक ઉપર દોરેલી લંબ = ત્રિકોણની ઉંચાઈ.

(૫૩). પ્રશ્ન ૫૨ની સિદ્ધતામાં अबक સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અને अब = अक હો. पमर ∥ बक, ∴ अपर Δ સમદ્વિબાજુ છે. मइ + मफ, प માંથી अर ઉપર દોરેલા લંબ બરાબર છે અને मड, प માંથી बक ઉપર દોરેલા લંબ બરાબર છે તેથી मड + मइ + मफ, ब માંથી अक બાજુ ઉપર દોરેલા લંબ બરાબર છે.

૫૪). अब = ∥ कड હો અને पइ કોઇપણ લીટી ઉપર अप, बर, कल, डइ લંબ દોરો. ત્યારે पर કાટખુણ પ્રલંબન = लइ કાટખુણ પ્રલંબન થશે. अ, क માંથી परलइ ∥ अम, कव દોરો. હવે अब ∥ कड અને अम ∥ पर એટલે लइ ∥ कव, ∴ ∠बअम = ∠डकव. ∴ अबम Δ, कडव Δ માં अब = कड, ∠म = ∠व, ∠बअम = ∠डकव, ∴ अम = कव. પણ अप ∥ मर, अम ∥ पर, ∴ अम = पर; તેજ પ્રમાણે कव = लइ; ∴ पइ = लइ છે.

(૫૫). अबक સમબાજુ Δ હો बक ⊥ अड દોરો ત્યારે अबड Δ ≡ अकड Δ છે. અને ∠बअक = ૬૦° છે, ∴ ∠बअड = ૩૦° છે. વળી बड = कड અને अब = बक = ૨ बड છે ∴ अबड કાટખુણ Δમાં ∠बअड ૩૦° છે અને अब = ૨ बड છે. એજ પ્રમાણે કોઇપણ

કાટખુણુ △ માં જો એક ખુણેા ૩૦° હોય તેા એ ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી છે.

(૫૬). ∠अबक કાટખુણેા છે. અને अक બરાબર કર્ણ છે. अक ને ड માં દુભાગેા. ત્યારે કાટખુણુ △ માં કર્ણના મધ્યબિંદુ ને કાટખુણુ બિંદુ સાંધનારી લીટી કર્ણથી અર્ધી છે, અને अक કર્ણ નિયમિત છે. ∴ बड પણુ અમુક લંબાઇની છે, અને ब બિંદુ સ્થિર છે. ∴ ब મધ્યબિંદુ અને કર્ણની અર્ધી ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દેારેા. આ વર્તુળનું કેાઇ પણુ બિંદુ આપેલી લંબાઇની કર્ણનું મધ્યબિંદુ હેાઇ શકે છે. માટે આ વર્તુળ માગેલું નિધાન છે.

(૫૭). બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી अफ, अग, कइ, कर દેારી છે; ત્યારે पकलअ રેામ્બસ થશે. આપેલી આકૃતિ ચેારસ છે, ∴ अर = गक છે. અને अइग △ ≡ कडर △ છે. ∴ ∠रअल = ∠गकर છે. ∴ अरल △ પણુ ≡ कगल △. ∴ अल = कल. એજ પ્રમાણે कठ = कप = पअ. ∴ अल = लक = कप = पअ છે. ∴ पकलअ રેામ્બસ છે.

(૫૮). अइब △ અને अडक △ માં अब = अक, अइ = अड અને डअइ = ૯૦° = ∠डअक, ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ बइ=कड છે.

(૫૯). अप દુભાગનાર લીટી ઉપર कम લંબ દેારી લંબાવી बअને लમાં મળવા દેા. ત્યારે अलम △ ≡ अकम △. ∴ अल = अक અને તેજ પ્રમાણે पमल △ ≡ पकम △. ∴ अब + अक = अब = अल = बल છે. અને पब + पक = पब + पल વળી पलब △માં पल + पब > लब છે. ∴ पब + पक > लब, એટલે > अब + अक છે.

(૬૦). क મધ્યબિંદુ લઇ फइ ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દેારેા કે જે बकને લંબાવતાં लમાં મળે. ત્યારે फइ = फल. ∴ ∠फइल = ∠फलक છે. અને ∠फकल = ૧૮૦° − ∠फकइ = ∠अकब = ∠अबक. વળી डबइ △ અને लकफ △માં ∠कलफ = ∠डइब (= ∠लइफ), ∠लकफ = ∠डबइ, અને लफ = डइ (=इफ.), ∴ △ઓ સર્વસમાન છે. ∴ डब=कफ છે.

(૬૧). अब = ૫·૩″ પાયેા લેા. अब⊥अप = ૩·૪″ દેારેા. पમાંથી अब ‖ पड દેારેા. अबને कમાં દુભાગી कમાંથી अब⊥कड દેારેા. अडब માગેલેા સમદ્વિબાજુ ત્રિકેાણુ થશે. अब ને कड કાટખુણે દુભાગે છે; ∴ डअ = डब છે.

(૬૨). સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં પાયા ઉપર શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લંબ પાયાની સામેના ખૂણાને દુભાગે છે. अड આપેલી ઉંચાઈ લો. આપેલા ખૂણાના અર્ધા બરાબર ∠डअब, ∠डअक દરેક બનાવો. ડમાંથી अड⊥ बडक દોરો. ત્યારે अबक માગેલો △ છે. अडब, अडक △ઓમાં ∠डअब = ∠डअक, ∠अडब = ∠अडक, अड સામાન્ય છે; ∴ अब, अक બરાબર છે.

(૬૩). પ્રશ્ન ૬૨ પ્રમાણેજ રચના કરો. પણ સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો ૬૦° છે. માટે પ્રશ્નના પક્ષમાં ઉંચાઈની સાથે ખુણો પણ આપ્યો છે. માટે પ્રશ્ન ૬૨ ની રચના પ્રમાણેજ રચના કરો.

(૬૪). अ થી अकब ઉત્તરમાં દોરો અને अड ઇશાનમાં દોરો. अ આગળ વહાણ છે અને દીવાદાંડી अड માં છે. अब ઉપર अब = ૧.૫ (= ૧૫ માઇલ) કાપો. અને ब થી પૂર્વની દક્ષિણે ૭½° ઉપર बड દોરો. ત્યારે बड = ૧૩½ માઇલ છે. ड માંથી अब ઉપર डक લંબ દોરો. જ્યારે વહાણ क આગળ હતું ત્યારે તે દીવાદાંડીની પાસેમાં પાસે હતું. અને अक = ૧૩.૫ માઇલ છે. તેથી મૂળ જગ્યાએથી વહાણ જ્યારે ૧૩.૫ માઇલ જાય ત્યારે તે દીવાદાંડીની પાસેમાં પાસે આવે છે.

(૬૫). अबक △ ની अब માં अप = ⅓ अब લો. प માંથી बक ∥ पड દોરો. ત્યારે पड ∥ बक અને अप = ⅓ अब ∴ अड = ⅓ अक છે. डर = रक કાપો. अब ∥ डल કે रम દોરો. ∴ बल = लम = मक છે. અને पड = बल, पब = डल, ∴ पड = बल છે. ∴ पड = ⅓ बक છે.

(૬૬). ∠बअक આપેલો ખુણો છે. बअ ને ड સુધી લંબાવો. ∠कअड ના ચાર સરખા ભાગ કરો. આમાંથી ∠कअल = ¼ ∠कअड છે. अक ના કોઇ પણ બિંદુમાંથી अल ∥ कब દોરો. ત્યારે ब, क માગેલાં બિંદુ છે. ∠अकब = ∠कअल = ¼ ∠कअड છે. અને ∠ब = ∠लअड = ¾ ∠कअड છે. ∴ ∠ब = ૩ ∠क છે.

(૬૭). अब સાંધો. बड સમાન્તર ઉપર अब = बड કાપો. अक સમાન્તર ઉપર अब = अक કાપો. कड સાંધો. ત્યારે अक ∥ = बड, ∴ अबडक સ૦ ચ૦ છે. અને अब = अक = बड, ∴ તે રોમ્બસ છે.

(૬૮). રચના કહ્યા પ્રમાણે કરો. पड સાંધો. अपय, अडम △ઓમાં अप = अड, अय = अम, અને ∠पअड સામાન્ય છે. ∴ ∠अमड = ∠अयम અને पय = डम. વળી पमड, डपय △ઓમાં पम = डय, मड =

पय, અને ∠पमड = ∠पयड, ∴ ∠पडम = ∠यपड. ∴लप = लड વળી अपल, अडल △ઓમાં अप = अड, पल = लड, અને अड સામાન્ય છે, ∴ ∠पअल = ∠डअल છે.

(૬૯). अमांथी कड ઉપર अम લંબ દોરી अम લંબાવી मइ = अम કરો. इब સાંધી લંબાવી कड ને प માં મળવા દો. अप સાંધો ત્યારે ∠अपक ∠बपक = થશે. હવે अमक △, इमप △માં मअ = मइ, मप સામાન્ય છે, અને ∠अमप = ∠इमप, ∴ ∠अपम = ∠इपम. ∴ તેઓના ન્યૂનતાપૂરક ∠अपक, ∠बपक પણ બરાબર છે.

(૭૦). अब આપેલી લીટી, ट, प, ड, આપેલાં બિંદુ લો. अब⊥मव દોરી वइ = मव કરો. वइ = मव કરો. टइ સાંધો. डप ∥ इट દોરો. टइ, अबને रમાં છેદે છે. डर, अब ને प માં અને मर ને લંબાવતાં क માં છેદે છે. कर ∥ पय દોરી पय ને रय માં य માં મળવા દો. હવે मवर △ ≡ इवर △. ∴ ∠मरव = ∠इरव. ∴ ∠यरक = ∠करप. વળી यर ∥ कप, ∴ ∠डपर = ∠रपय, ∴ અને તેથી प, र આગળના पकरय ની અંદરના ચારે ખૂણા સરખા છે; ∴ पकरय માગેલો રોમ્બસ છે.

(૭૧). अब સાંધી લંબાવી कड ને प માં મળવા દો. ત્યારે पअ, पब નો તફાવત अब બરાબર છે. कड માં કોઇપણ ल બીજું બિંદુ લો. अल, लब સાંધો ત્યારે अलब ત્રિકોણમાં अल, बल બે બાજુઓનો તફાવત ત્રીજી બાજુ કરતાં નાનો છે અને તે પ્રમાણે ल કોઇપણ જગ્યાએ कड માં હોય તોપણ अब, पअ, पब ના તફાવત કરતાં મોટી છે માટે अब તફાવત મોટામાં મોટો છે.

(૭૨). अब સાંધો अबને लपथी કાટખૂણે દુભાગો અને लपને कड માં पમાં મળવા દો. ત્યારે अलप △ ≡ बलप △. ∴ पअ = पब. ∴ पअ, पबનો તફાવત શૂન્ય છે. ∴ प માંગેલું બિંદુ છે.

(૭૩). अबक આપેલો △ છે. ∠बअकને अमथी દુભાગી अपને बकમાં मમાં મળવા દો. ∠मअक = ∠अमप કરો અને ∠मअब = ∠अमर કરો. આ નવા ખુણાઓની શાખા લીટીઓ જો બાજુઓને प, rમાં મળે તો अपमर માગેલો રોમ્બસ છે. હવે अपम △, अरम △માં બબ્બે ખુણા ને એકેક બાજુ બરાબર છે. ∴ अप = अर અને मप = मर. વળી पअ = पम પણ છે. ∴ अरपम રોમ્બસ છે.

(૭૪). पक, पर બે આપેલી લીટી છે, અને अब ત્રીજી આપેલી લીટી છે. पक ∥ अड, અને पर ∥ बड દોરો. पक = अड, અને पर = बड કરો.

ત્યારે अब $\parallel$ = कर છે, $\because$ अबड $\triangle$ને करप $\triangle$માં पक = डअ, पर = डब અને $\angle$प = $\angle$ड ($\because$ બન્ને ખુણા બબ્બે સમાન્તરોની વચ્ચેના છે), $\therefore$ कर = अब છે. અને $\angle$पकर = $\angle$डअब, અને पक $\parallel$ डअ, $\therefore$ अब, कर સમાન્તર છે.

(૭૫). इफ = इब, $\therefore$ $\angle$फ = $\angle$इबड છે. અને $\angle$कइब બહારનો = $\angle$फ + $\angle$इबड = २ $\angle$फ છે. અને $\angle$कइब = $\angle$क છે, $\because$ बइ = बक છે. વળી $\angle$अबक બહારનો = $\angle$क + $\angle$फ = $\angle$कइब + $\angle$फ = ३ $\angle$फ છે.

નોટ–કોઇ પણ ખુણાના ત્રણ સરખા ભાગો કરવાને માટે ઉપરની **યાંત્રિક** રચના છે. શાસ્ત્રીય રીતે (અન્ય સિદ્ધાંતોમાં વપરાય તે રીતે) ખૂણાના ત્રણ સરખા ભાગો થઇ શકતા નથી.

(૭૬). पम કોઇ પણ લીટી લો અને તેના ઉપર આપેલી ઉંચાઇએ पम $\parallel$ डअल લીટી દોરો. डलમાં કોઇ પણ अ બિંદુ લો. अમાંથી पम $\perp$ अत્ર દોરો. અને $\angle$त्रअब = ૯૦° – $\angle$ब કરો. અને $\angle$त्रअक = ૯૦° – $\angle$क કરો. ત્યારે अबक $\triangle$ માગેલો ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૭૭). $\angle$अ આપેલો શિરોબિંદુ ખુણો છે અને बक આપેલો પાયો છે $\angle$कबअ ને ૯૦° – अ/२ કરો અને $\angle$बकअ ને ૯૦° – अ/२ કરો. ત્યારે अबक માગેલો ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૭૮). अ એક આપેલી કર્ણ છે અને अड બે બાજુઓનો સરવાળો છે $\angle$इअब એક અર્ધો કાટખુણો કરો. ड મધ્યબિંદુ લઇ अ ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ अबक ને ब, क માં છેદે તેમ દોરો. ब, क માંથી अड ઉપર बप, कल લંબ દોરો. ત્યારે डबप, डकल માગેલા કાટખુણ ત્રિકોણ છે. $\because$ $\angle$अ = ½ $\angle$. અને $\angle$प = १ $\lfloor$ = $\angle$ल. $\therefore$ $\angle$पबअ = ½ $\lfloor$ = $\angle$लकअ છે. $\therefore$ पब = पअ અને लक = लअ છે. તેથી पड + पब = अड = लड + लक.

ड માંથી अबक ઉપર જે લંબ દોરીએ તેના કરતાં अ મોટી હોય તો ઉપર પ્રમાણે બે ત્રિકોણો થાય છે; બરાબર હોય તો એકજ ત્રિકોણ થાય છે; અને નાની હોય તો ત્રિકોણ અશક્ય છે.

(૭૯). अब કર્ણ અને એક બાજુના સરવાળા બરાબર છે. अ આગળ $\angle$बअक = ૪૫° કરો. અને ब આગળ $\angle$अबक = २२½° કરો. $\angle$बकड = २२½° કરી कड ને अब માં ड માં મળવા દો. ત્યારે अकड માગેલો ત્રિકોણ છે. $\angle$ब = $\angle$बकड = २२½°, $\therefore$ डब = डक અને

∠अडक = ૪૫° = ∠अ; ∴ ∠अकड = ૯૦° અને अकड સમદ્વિબાજુ કાટખુણ △ માં अड કર્ણ + कड બાજુ = अब આપેલી લીટી છે

(૮૦). ક કર્ણ અને अब બાજુઓનો તફાવત છે. अब ને લંબાવી ∠डबक = ૪૫° કરો. अ મધ્યબિંદુ લઇ ક ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ बक ને क, इ માં મળે તેમ દોરો. क, इમાંથી अबड ઉપર कड, इप લંબ દોરો. ત્યારે अकड, अपइ માગેલા ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે. પ્રશ્ન ૭૮ ની માફક બીજી રીતો પણ અહીં સમજવી.

(૮૧). અ = बक લો અને ∠ब = ∠कबअ કરો बअ ઉપર बड બીજી બાજુઓના આપેલા સરવાળા બરાબર કરો. डक સાંધો. ∠ड = ∠डकअ કરો. ત્યારે अबक માગેલો ત્રિકોણ છે. ∠ड = ∠डकअ, ∴ अड = अक. ∴ अब + अक = बड = આપેલો સરવાળો.

(૮૨). અ બરાબર बक લો. ∠कबड = આપેલો ∠ब કરો बड આપેલા તફાવત બરાબર લો. बड લંબાવો. कड સાંધી તેને કાટખૂણે દુભાગી દુભાગનારી લીટીને डअમાં अમાં મળવા દો. अक સાંધો. ત્યારે अबक માગેલો ત્રિકોણ છે. अ બિંદુ, डकના દુભાગનાર લંબ ઉપર છે, ∴ अड = अक છે. ∴ अब − अक = डब = ક − બ છે. ∴ अबक △ માગેલો ત્રિકોણ થયો.

(૮૩). अब આપેલી લંબાઇની લો. अब પાયા ઉપર એક એવો △ બનાવો કે જેની બાજુ अक, बडથી અર્ધી હોય. अमब આ △ થયો. अम લંબાવી अम = मक કરો અને बम લંબાવી बम = मड કરો. ત્યારે अबकड માગેલો સ. ચ. છે; કારણ કે એના કર્ણો अक અને बड, અરસ-પરસ દુભાગે છે.

(૮૪). अबक એક સમબાજુ △ બનાવો अड ∥ बक અને अब ∥ डक દોરો. ત્યારે अबकड માગેલો રોમ્બસ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૮૫). કર્ણો બરાબર છે અને અરસપરસ દુભાગે છે, માટે તે લંબ ચોરસના કર્ણો હોવા જોઇએ. વળી કર્ણોનો અંતર્ખૂણો ૬૦° છે માટે ચતુષ્કોણની એક બાજુ સાથે સમબાજુ ત્રિકોણ થાય છે. માટે પક્ષ અધુરો નથી. ૨·૭ સે. મી. ની બાજુ ઉપર એક સમબાજુ △ બનાવી (अबम) તેની બાજુઓ લંબાવી એક લંબચોરસ બનાવો.

(૮૬). अब આપેલો પાયો લો. अब ∥ प ઉંચાઇએ कइ દોરો अब ને ड માં દુભાગો ड મધ્યબિંદુ લઇ મધ્યગા (ક)ની ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ कइ ને इ માં છેદે તેમ દોરો. अइब માગેલો ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૮૭). अक અને अब દરેક ૫ સે. મી. કરો. ત્યારે कब માગેલું નિધાન છે. कब માં કોઇપણ ड બિંદુ લો. ड માંથી डइ, डफ લંબ દોરો. ∠अ = ૧ ⌊ = ∠इ = ∠फ, અને अक = अब, ∴ ∠क = ∠ब = ½ ⌊. ∴ डइ + डफ = कइ + इअ અથવા = बफ + फअ = ૫ સે. મી. છે.

વળી अक = अब = ૨ સે. મી. કરો. कब સાંધી લંબાવો ત્યારે कब ની બહારનો कब નો લંબાવેલો ભાગ માગેલું નિધાન છે. ∠क = ∠ब = ½ ⌊. ∴ डफ = बफ. ∴ डइ – डफ = फअ – फब = अब = ૨ સે. મી. છે.

(૮૮). बक થી આપેલે અંતરે बक ‖ ड લીટી અને इ લીટી દોરો ∠बअक ને अडइ થી દુભાગો. ત્યારે ड, इ માગેલાં બિંદુઓ છે.

(૮૯). बक ને કાટખુણે मड થી દુભાગો. જો अड, मड, डमां મળે તો ड માગેલું બિંદુ છે. જો अड ‖ मड આવે તો બિંદુ અશક્ય છે.

(૯૦). अ મધ્યબિંદુ લઇ આવેલા અંતરની ત્રિજ્યા લઇ એક डइफ વર્તુળ દોરો. बक ને मडइ થી કાટખુણે દુભાગો. જો मडइ, વર્તુળને ड, इ માં છેદે તો ड, इ માગેલાં બિંદુઓ છે.

(૯૧). अब ⊥ कइ દોરો. कइથી બમણી ઉંચાઇએ अब ‖ रड લીટી દોરો. ત્યારે रड માગેલું નિધાન છે.

ड કોઇ પણ બિંદુ લઇ डक સાંધી अबમાં प સુધી લંબાવો. ड માંથી अब ⊥ डल દોરો. ત્યારે डलप △ માં कइ ‖ डल અને डल = ૨ कइ છે, ∴ पड = पक. ∴ कड = कप છે. અને એજ પ્રમાણે अब માં प બીજી કોઇ જગ્યાએ લઇએ તો पक ને रड સુધી લંબાવતાં कड = कप છે. ∴ रड માગેલું નિધાન છે.

(૯૨). ड માંથી डम કોઈ પણ લીટી अक સુધી દોરી मड લંબાવી डप = डम કરો. प માંથી अक ‖ बप દોરો. बड સાંધી अक ના क સુધી લંબાવો. ત્યારે पडब △, मकड △ માં पड = मड, ∠प = ∠म, અને ∠पबड = ∠मकड, ∴ डब = डक છે.

(૯૩). अब, कड બે ‖ લીટીઓ અને प એક બિંદુ લો. अब, कड ની વચ્ચે લંબ અંતર દોરી તેના મધ્યબિંદુમાંથી એની સમાન્તર બન્નેથી સરખે અંતરે રહેતી इर લીટી દોરો. प મધ્યબિંદુ લઈ આપેલી અ ત્રિજ્યાથી એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ જો इर ને म, ल માં છેદે તો म, ल માગેલાં બિંદુ છે. જો ન છેદે તો રચના અશક્ય છે; જો એક

બિંદુમાં છેદે તો એકજ રચના છે (प માંથી इर ઉપર જે લંબ દોરીએ એવડીજ અ ત્રિજ્યા હોય ત્યારે).

(૯૪). अब આપેલી લીટી છે અને कड આપેલો પાયો છે. कड ‖ આપેલી ઉંચાઇને અંતરે એક લીટી पम દોરો. તેથી पम નું કોઇ પણ બિંદુ कड થી આપેલી ઉંચાઇને અંતરે છે. જો पम લીટી अब ને अमां છેદે તો अकड △ માગેલો △ છે.

(૯૫). સમદ્વિબાજુ △ માં પાયા ઉપરની ઉંચાઈ પાયાને કાટખુણે દુભાગે છે. अब કોઇ પણ પાયો લઈ તેને ड માં દુભાગો. अब ⊥ डक દોરો. ∠डअक (અથવા ∠डबक ૩૦° નો બનાવો-પ્રોટ્રેક્ટરથી નહિ). कब સાંધો. ત્યારે अबक △માં ∠अ = ૩૦° છે; ∴ ∠अकड = ૬૦° છે. અને ∴ अक = ૨ कड છે. ∴ अबक માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૯૬). अबને દુભાગી अब વ્યાસ ઉપર अडब અર્ધવર્તુળ દોરો. તેમાં अड આપેલી ઉંચાઈ બરાબર મુકો. डब સાંધો. ત્યારે અર્ધવર્તુળમાંનો ∠ड એક કાટખૂણો છે. अमांથી बअ ⊥ अक દોરો. बड લંબાવી अकને कમાં મળવા દો. ત્યારે अबक માગેલો ત્રિકોણ છે; અને એમાં अब પાયો છે, अड ઉંચાઇ આપેલી છે, અને ∠बअक કાટખૂણો છે.

(૯૭). ∠बअक આપેલો ખૂણો લો તેને अडથી દુભાગો. અને अड આપેલી ઉંચાઇ બરાબર કાપો. डમાંથી अड ⊥ बडक દોરો. ત્યારે अबक માગેલો △ થશે. ∵ अडब △, अडक △ માં ∠डअब = ∠डअक, ∠बडअ = ∠कडअ, અને अड સામાન્ય છે, ∴ अब = अक.

(૯૮). ∠अबइ = ૩૦° કરો. अमांથી बइ ઉપર अइ લંબ દોરો. ત્યારે अबइ કાટખુણ △માં अब કર્ણ = ૨ अइ છે अमांથી बइ ‖ अड દોરી अड = अब કરો. અને अब ‖ डक દોરો. જો डक, बइને कમાં મળે તો अबकड રોમ્બસ છે, અને તેની બે બાજુ વચ્ચેની ઉંચાઇ अइ, अब બાજુથી અર્ધી છે.

(૯૯). बकના કોઇ પણ ड બિંદુ આગળ कडप ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર કરો. अमांથી पड ‖ अब દોરો. ત્યારે ∵ अब ‖ पड, ∴ ∠ब = ∠ड = આપેલો ખુણો. ત્યારે अब માગેલી લીટી છે.

(૧૦૦). अक ના કોઇપણ क બિંદુમાંથી अड સુધી कइ લીટી દોરો. इक લંબાવી इक = कल કરો. अड ‖ लब દોરો. बक સાંધી ड સુધી

લંબાવો. ત્યારે बकड માગેલી લીટી છે; ∴ इकड △ ≡ लकब △; ∴ कब = कड છે,

(૧૦૧). अबक એક સમબાજુ ત્રિકોણુ બનાવો તેના ∠ब, ∠अ ને बम, अम થી દુભાગી अक ∥ मड અને बक ∥ मइ, बअ ને ड,इ માં મળે તેમ દોરો. ∵अक ∥ डम, ∴ ∠मडइ = ∠बअक = ૬૦° અને તેમજ ∠मइड = ૬૦°; ∴ मडइ △ સમબાજુ છે; ∴ मड = डइ = इम. વળી ∠कअम = ∠डअम = ∠डमअ; ∴ डम = डअ, અને તેમજ इम = इब છે. તેથી अड = डइ = इब. તેથી अबના પણુ સરખા ભાગ થાય છે

(૧૦૨). ड, इ, फ ત્રણુ મધ્યબિંદુઓ આપ્યાં છે. ત્રિકોણુની બે બાજુનાં મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુની સમાન્તર અને અર્ધી છે. डइफ △ પુરો કરો. આ ત્રિકોણુની બાજુઓની સમાન્તર હોય એવી લીટીઓ ड, इ, फમાંથી દોરી अबक △ બનાવો. ત્યારે अफडइ સ. ચ. છે, ∴ डफ ∥ = अइ; અને એજ પ્રમાણે डफ ∥ = इक છે. ∴ इ, अकનું મધ્યબિંદુ છે. એજ પ્રમાણે ड, बकનું અને फ, अबનું મધ્યબિંદુ છે. ∴ अबक માગેલો △ છે.

(૧૦૩). कअ, कब બે બાજુ અને कफ મધ્યગા આપી છે. कफ ને म. સુધી લંબાવી कफ = फम કરો कम પાયા ઉપર कअम △ એવો બનાવો કે कअ આપેલી એક બાજુ બરાબર અને मअ આપેલી બીજી બાજુ બરાબર હોય. कमના મધ્યબિંદુ फને अ જોડે સાંધી अफ લંબાવી अफ = फब કરો. कब સાંધો. ત્યારે कबफ △ અને अमफ △ માં कफ = मफ, बफ = अफ, અને ∠कफब = ∠अफम, ∴ कब = अम આપેલી બાજુ; અને अबक △માં कफ લીટી अबને દુભાગનારી મધ્યગા છે. ∴ अबक △ માગેલો ત્રિકોણુ છે

(૧૦૪) अब આપેલી બાજુ લો. अब પાયા ઉપર બે આપેલી મધ્યગાઓના બે તૃતીયાંશ ભાગ બરાબર બાજુ હોય એવો गअब △ બનાવો. बग, अग લંબાવી ½ बग = गइ, ½ अग = गड કરો. अइ, बड સાંધી લંબાવી अबक △ પુરો કરો. જો अग, बग ને म, प માં દુભાગીએ તો इड = ∥ मप; પણુ मप ∥ અને = ½ अब ∴ इड ∥ અને = ½ अबછે. ∴ अबक માગેલો △ ત્રિકોણુ છે, કે જેમાં बइ, अड મધ્યગા છે.

(૧૦૫). ત્રણે આપેલી મધ્યગાઓના બે તૃતીયાંશ ભાગો બરાબરની બાજુવાળો गबम △ બનાવો. गम ને ड માં દુભાગી बड લંબાવી बड = डक કરો. डग લંબાવી गम = ૨ गड = गअ કરો. अब, अक સાંધો.

ત્યારે गबमक સ૦ ચ૦ છે. અને अग, बग, कग દરેક બે તૃતીયાંશ મધ્યગા છે. અને તેઓ એકબિંદુગામી છે; ∴ अबक માગેલો △ છે.

(૧૦૬). अड આપેલી ઉંચાઇ લો. ∠डअब = ૯૦° − ૪૦° = ૫૦° કરો અને ∠डअक = ૯૦° − ૬૦° = ૩૦° કરો. ड માંથી अड ⊥ बक દોરો. ત્યારે अबक △ માગેલો ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૦૭) अबक △ માં अड મધ્યગા છે. હવે अड + डक > अक; અને अड + डब > अब. ∴ ૨ अड + बक > अब + अक. ∴ अड + ½ बक > ½ (अब + अक) છે.

(૧૦૮). अब પાયો લો. અને क એક બાજુ અને ઉંચાઇના સરવાળા બરાબર લો अब ને ड માં દુભાગી अब ⊥ डइ દોરો. डइ ને क બરાબર કાપો. अइ સાંધી ∠इ = ∠इअक કરો. જો क, डइ ઉપર આવે તો बक સાંધો. હવે ∠इ = ∠इअक, ∴ कइ = कअ. ∴ डइ = कड ઉંચાઇ + कअ બાજુ. વળી अडक △ ≡ बडक △, ∴ अक = बक. ∴ अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(૧૦૯). अड ને ल સુધી લંબાવી अड = डल કરો. लक સાંધો. ત્યારે अडब △, कडल △ માં अड = डल, डब = कड, ∠अडब = ∠कडल, ∴ ∠बअड = ∠ल. પણ अब એટલે कल > अक. ∴ ∠कअड > ∠ल એટલે ∠बअड. પણ ∠बअक ને अप લીટી દુભાગે છે, ∴ ∠कअड > ½ ∠बअक. ∴ अड મધ્યગા अब અને अप ની વચ્ચે પડે છે.

(૧૧૦). ∠क = ૧ ⌊ − ∠कअम, અને ∠ब = ૧ ⌊ − ∠बअम. પણ अब > अक, ∴ ∠क > ∠ब; ∴ ∠बअम > ∠कअम. પણ ∠बअप = ½ ∠बअक; ∴ ∠बअम > ½ ∠बअक. ∴ अम લંબ ∠पअक ની અંદર પડે છે. ∴ अप લીટી अड અને अम ની વચ્ચે પડે છે.

(૧૧૧) म માંથી कड⊥अल દોરો. ∠बम અને मर થી દુભાગો. જો मर, कड ને र માં મળે તો मल ∥ रप દોરો. જો रप, अब ને प માં મળે તો प માગેલું બિંદુ છે. ∴ मल ∥ पर ∴ रप⊥कड છે. ∴ कड ઉપર पर, प નું અંતર છે. વળી मल ∥ पर, ∴ लमर = ∠परब = ∠पमर, ∴ पम = पर છે.

(૧૧૨). ∠अबक ને बइ થી દુભાગો. इ માંથી बक ∥ इड દોરો. ∵ ∠इबक = ∠डइब = ∠डबइ, ∴ डब = डइ છે. વળી ∠डबक = ∠इकब અને डइ ∥ बक, ∴ ∠अडइ = ∠अइड ∴ अड = अइ; ∴ डब = इक. ∴ डइ = डब = इक છે.

(૧૧૩). ∠अबक, ∠अकब ને बम, कम થી દુભાગી म માંથી बक ∥ डमइ દોરો. ∵ ∠डमब = ∠मबक = ∠मबड, ∴ डम डब = તેમજ इम = इक છે. ∴डइ = डब + इक છે.

વળી बक ને ल સુધી લંબાવી ∠अबक. ∠अकल ને बम, कम થી દુભાગો. म માંથી बक ∥ मइड દોરો. ∵ ∠डमब = ∠मबक = ∠मबड, ∴ मड = डब. અને તેમજ ∠इमक = ∠मकल = ∠मकइ ∴ इम = इक; ∴ डइ = डम – इम = डब – इक છે.

(૧૧૪). अबक △માં अब = अक છે. बक ને લંબાવી ड માંથી अब⊥डफ અને अकइ⊥डइ દોરો. अब ∥ कल, डफ ને ल માં મળે તેમ દોરો. ∵ अब ∥ कल, ∴ ∠डकल = ∠ब = ∠अकब = ∠डकइ; વળી डकल △; डकइ △માં ल = ∠फ = १ ⌊ = ∠इ, ∠डकल = ∠डकइ, डक સામાન્ય છે, ∴ डल = डइ છે. ∴डफ – डइ = डफ – डल = अब ઉપર क માંથી દોરેલા લંબ અંતર છે. = મુકરર અંતર છે.

(૧૧૫). अब એક આપેલી લીટી છે; અને पक, डर બીજી બે આપેલી લીટી છે. ક આપેલી લંબાઇ છે. कप ને લંબાવી (જરૂર પડે તો) अब ને प માં મળવા દો. अब ઉપર पल આપેલી ક લંબાઇની કાપો. पक ∥ लर, रड ને र માં મળે તેમ દોરો. अब ∥रक દોરો. ∵ पल ∥ कर અને पक ∥ लर, ∴पल = कर = ક છે.

(૧૧૬). पलक ખુણો આપેલી पल, कल લીટી બનાવે છે. ક આપેલી લંબાઇ છે. ∠पलकને लमથી દુભાગો. लम ⊥ लर દોરી लर = ક કરો. रમાંથી लप ∥ रक દોરો. અને कમાંથી लर ∥ कप દોરો. તે लमને मમાં મળે છે. હવે लर ∥ पक અને लप ∥ रक, ∴ पक = लर = ક આપેલી લંબાઇ. વળી लर ∥ पक, ∴ पक ⊥ लम છે. અને ∠पलम = ∠कलम; ∴ △ लमप ≡ △ लमक; ∴ ∠प = ∠क છે.

(૧૧૭). अ, ब બે આપેલાં બિંદુ અને कड આપેલી લીટી છે. ∠क, ∠ड દરેક ૬૦°નો કરો અને આ ખુણાઓની कड સિવાયની શાખા લીટીઓની સમાન્તર अ, बમાંથી पअम, पबल લીટી દોરો. ત્યારે पमल માગેલો સમબાજુ ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૧૮). अबक ત્રિકોણ લો. ∠अबकને बमथी દુભાગી अकને मમાં મળવા દો. मમાંથી बक સુધી अब ∥ मड દોરો; અને अब સુધી बक ∥ मप

દોરો. ત્યારે मड ‖ पब, ∴ ∠पबम = ∠बमड = ∠मबड, ∴ डम = डब. એજ પ્રમાણે मप = पब. અને मपबड સ. ચ. છે. ∴ बपबड રોમ્બસ છે.

(૧૧૯). डइ આપેલી પરિમિતિ અને ∠म આપેલો સાંકડો ખુણો છે. $\frac{1}{2}$ ∠म = ∠इडअ કરો. અને $\frac{1}{2}$ ⌊ = ∠डइअ કરો. ∠ड = ∠डअब કરો; અને ∠इ = ∠इअक કરો. ब, क, डइ ઉપર છે. ત્યારે अबक માગેલો કાટખુણ ત્રિકોણ છે; ∵ अब = बड છે; अक = कइ છે. અને ∠अकब = ∠इ + ∠इअक = ૧ કાટ ખુણો.

(૧૨૦). ક આપેલી ઉંચાઇ છે. अब કોઇ પણ લીટી દોરો. अब સમાન્તર कड, अबथी ક ઉંચાઇએ દોરો. अ આગળ ∠बअक ૬૦° નો કરો. અને क આગળ ∠अकब પણ ૬૦°નો કરો. ત્યારે अबक માગેલો સમબાજુ ત્રિકોણ છે કારણ કે તેની ઉંચાઇ अब, कडના અંતર બરાબર છે.

(૧૨૧). अ, ब એ આપેલાં બિંદુ છે. कड આપેલી લીટીની સમાન્તર આવેલી ક ઉંચાઇએ એક मइल લીટી દોરો. इल⊥बल દોરી લંબાવી बल = लर કરો. अर સાંધી इऋ ને इ માં મળવા દો. अइ, बइ ને कड સુધી ड, क માં અનુક્રમે મળે તેમ લંબાવો. ત્યારે इकड માગેલો સમદ્વિબાજુ △ છે ∵ बइल △ ≡ रइल △, ∴ ∠बइल = ∠रइल. વળી इल ‖ कड; ∴ ∠क = ∠बइल, અને ∠ड = ∠रइल. ∴ ∠क = ∠ड છે.

(૧૨૨). अब પાયાને ड માં દુભાગી अब નો દુભાગનાર લંબ डम દોરો डम આપેલા તફાવત બરાબર લો. अम સાંધી ∠अमड = ∠मअक બનાવી अक ને मडक ને क માં મળવા દો. कब સાંધો. ∵ ∠म = ∠कअम, ∴ अक = कम. ∴ अक − कड = मक − कड = डम અને क, દુભાગનાર લંબ ઉપર છે, ∴ कअ = कब. ∴ अबक માગેલો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(૧૨૩). बक्र આપેલો પાયો, ∠म આપેલો ખુણાઓનો તફાવત અને ક આપેલો બાજુઓનો તફાવત છે. ∠कबड ને $\frac{1}{2}$ ∠म બરાબર કરો. क મધ્યબિંદુથી ક ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરી बड ને ड, ड′ માં છેદવા દો. ड જો ब ની પાસેનું બિંદુ હોય તો कड સાંધી अ સુધી લંબાવો. ∠अडब = ∠अबड કરો. ત્યારે अब = अड ∴ अक − अब = अक − अड ક. અને ∠अडब = ∠क + $\frac{1}{2}$ ∠म. ∴ ∠अबक − ∠क = ∠म. ∴ अबक માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૧૨૪). अब આપેલો પાયો છે. ∠म ખૂણાઓનો તફાવત છે, અને ક બાજુઓનો સરવાળો છે. $\frac{1}{2}$ ∠म = अबड કરો. बड⊥बइ દોરો. अ

મધ્યબિંદુ લઇ क ત્રિજ્યાથી વર્તુળ દોરી बइ ને इ માં મળવા દો. अइ સાંધો ∠अइब = ∠इबक કરો. क બિંદુ अइ ઉપર છે. ત્યારે कइ = कब, ∴ कअ + कब = अइ = ક છે. અને ∠अबड = ½ ∠म, ∴ ∠अबइ − ∠अ = ૧ ⌊ + ½ ∠म = ∠अ = ૧ ⌊ + ∠म − (૧ ⌊ − ∠इ). ∴ ∠अबक − ∠अ = ∠म છે. ∴ अबक માગેલો △ છે.

(૧૨૫). કર્ણો અરસ પરસ દુભાગે છે માટે તેના છેદન બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી દોરીએ તો તે સ૦ ચ૦ ને દુભાગે છે. જો म આપેલું બિંદુ હોય તો म માંથી એ છેદનબિંદુમાંથી થઇ બાજુઓ સુધી पल લીટી દોરો. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૨૬). કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી બાજુ ઉપર લંબ લીટી દોરી સામી બાજુને મળવાદો. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૨૭). કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી આપેલી લીટીની સમાન્તર લીટી દોરી સામસામેની બાજુનાં જોડને મળવાદો. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૨૮). अब પાયાને इ માં દુભાગો. इ મધ્યબિંદુથી આપેલી મધ્યગાની ત્રિજ્યા લઇ એક વર્તુળ દોરો. अब સમાન્તર આપેલી ઉંચાઇએ कड લીટી દોરો. कड જો વર્તુળને ड માં છેદે તો अबड માગેલો ત્રિકોણ છે. સિદ્ધતા સ્પષ્ટ છે.

(૧૨૯). अबक △ની बक ને ड માં દુભાગો. अड સાંધી લંબાવો. अड ⊥ बम અને अड ⊥ कर દોરો. હવે बमड △, करड △ માં ∠म = ∠र, ∠बडम = ∠कडर, અને बड = कड, ∴ बम, कर બરાબર છે.

(૧૩૦). अब આપેલી લીટી અને प આપેલું બિંદુ છે. अब ના કોઇ પણ क આગળ આપેલા ખુણા બરાબર अकड ખુણો કરો. प માંથી डक ∥ पम, अब સુધી દોરો. ∵ डक ∥ पम, ∴ ∠अकड = ∠पमक = આપેલો ખૂણો.

(૧૩૧). बअक આપેલો ખુણો અને प આપેલું બિંદુ છે. ∠बअक ને अड થી દુભાગો. अड ⊥ पड દોરો. पड જો શાખા લીટીઓને बक માં છેદે તો अब = अक છે; ∵ ∠अडब = ∠अडक, ∠बअड = ∠कअड, अड સામાન્ય છે; ∴ अबड △ ≡ अकड △.

(૧૩૨). अबक △ લો. ∠अને अडથી દુભાગી बकને डમાં મળવા દો. डમાંથી अब ∥ डइ, અને अक ∥ डफ, બાજુઓ સુધી દોરો. ત્યારે

अइडफ સ. ચ. છે. અને ∠फअड = ∠अडइ = ∠इअड, ∴ अइडफ સ. ચ. રોમ્બસ છે.

(૧૩૩). अडफ △માં अड = ૨ अब = अफ, ∴ ∠अडफ = ∠फ = ∠कडफ, ∴ डफ, ∠अडकને દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે कइ, ∠बकड ને દુભાગે છે. પણ ∠अडक + ∠बकड = ૧૮૦°, ∴ ∠कडफ + ∠इकड = ૯૦°; ∴ इक, डफ બન્ને કાટખૂણે મળે છે.

(૧૩૪). अबकड ચોરસ છે. अમાંથી र, ल મધ્યબિંદુ સુધી અને कમાંથી इ, म મધ્યબિંદુ સુધી લીટી દોરો. अक સાંધો. ∵ अइ ∥ = लक, ∴ अल ∥ इक; અને ∵ अम ∥ = रक ∴ अर ∥ मक; ∴ એ ચાર લીટીઓથી સ. ચ. થાય છે. વળી अमक △, अइक △માં अम = अइ, मक = इक, અને अक સામાન્ય છે; ∴ ∠मकअ = ∠इकअ ∴ એ સ. ચ. રોમ્બસ છે.

(૧૩૫). अप સાંધો. ત્યારે अबपड આકૃતિ = अबप △ + अपम △ + मपड △ છે. અને अबप △ = ½ अबपम સ. ચ; અને अपम △ + मपड △ = ½ (अबपम સ. ચ. + मपकड સ. ચ.) = ½ अबकड સ. ચ. છે.

પ્રશ્નોના ઉત્તરોના થોડાક નમુના.

પાછળ પ્રશ્નોના જે ઉત્તરો આપવામાં આવ્યા છે તે જગ્યાના બચાવને ખાતર ચાલુ લીટીમાંજ છાપ્યા છે. પરંતુ પરીક્ષામાં પરીક્ષકને માટે જે ઉત્તરો વિદ્યાર્થીઓને લખવા પડે તે એ પ્રમાણે ચાલુ લીટીમાં ન લખતાં નીચે પ્રમાણે લખવા એ સારૂં છેઃ—

નમુનો ૧ લો.

પ્રશ્ન—કોઇ ચતુષ્કોણમાં બે પાસે પાસેની બાજુઓ સરખી હોય અને કર્ણો કાટખૂણે છેદે તો તેની બીજી બાજુઓ પણ સરખી છે.

પક્ષ—अबकड આપેલો ચતુષ્કોણ છે; અને તેમાં अब = अड, અને अक ⊥ बड છે.

સાધ્ય—ત્યારે તેની બીજી બાજુઓ कड, कब બરાબર થશે.

સિદ્ધતા—હવે अमड △, अमब △માં

કારણ કે $\begin{cases} \text{अड કર્ણ} = \text{अब કર્ણ}, \\ \text{अम સામાન્ય છે, અને} \\ \angle \text{अमड} = 1 \llcorner = \angle \text{अमब}, \end{cases}$

∴ अमड △ ≡ अमब △ છે.

∴ मड = मब.

વળી कमड △, कमब △ માં

કારણ કે $\begin{cases} \text{मड} = \text{मब}, \\ \text{मक સામાન્ય છે, અને} \\ \text{અંતર્ખૂણો कमड} = \text{અંતર્ખૂણો कमब} \end{cases}$

∴ कमड △ ≡ कमब △.

∴ कड = कब છે. પ્ર. સિ.

નમુનો ૨ જો.

પ્રશ્ન—अम લીટી बअक ખૂણાને દુભાગે છે, અને अब સમાન્તર मक છે, અને अक સમાન્તર मब છે, તો अकमब આકૃતિ રોમ્બસ છે. (વિશષ્ટ પ્રતિજ્ઞા આપેલીજ છે માટે તે ફરીથી લખવાની જરૂર નથી.)

સિદ્ધતા—∵ अब ‖ मक, અને अक ‖ मब છે;

∴ अकमब ‖ કોણ છે.

વળી ∵ अब ‖ मक, ને अम તેને મળે છે,

∴ ∠बअम = ∠अमक છે.

પણ ∠बअम = ∠कअम છે;

∴ ∠अमक = ∠कअम છે.

∴ कअ = कम છે.

પણ ∵ अकमब ‖ કોણ છે,

∴ अक = बम, ને अब = कम.

∴ अक = कम = मब = बअ છે.

∴ अकमब રોમ્બસ છે. પ્ર૦ સિ૦

નમુનો ૩ જો.

પ્રશ્ન—पलर એક આપેલો ત્રિકોણ છે; अबक એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે र, ल તેની अक, अब નાં મધ્યબિંદુ હોય અને अ માંથી बक ઉપર જે લંબ દોરીએ તેનો છેડો प હોય.

રચના—रल ∥ **प** માંથી **बपक** દોરો.
प માંથી **रल** ઉપર **पमअ** દોરો; અને **पम** = **मअ** કરો.
अल, अर સાંધી લંબાવી **बपक** ને **ब, क** માં મળવા દો.
ત્યારે **अबक** માગેલો △ થશે.

સિદ્ધતા—∵ **अपब** △ માં.
अम = **मप**, અને **मल** ∥ **पब**,
∴ **अल** = **लब** છે.
વળી ∵ **अपक** △ માં
अम = **मप**, અને **मर** ∥ **पक**,
∴ **अर** = **रक**.
∴ **ल, र, अब, अक** ના મધ્યબિંદુ છે.
વળી ∵ **रल** ∥ **कपब**, અને **पअ** ⊥ **बक**,
∴ **अप** ⊥ **बक** છે.
∴ **अबक** માગેલો △ છે. કૃ૦ કૃ૦

નમુનો ૪ થો.

પ્રશ્ન—અમુક નદીની પહોળાઇ શોધવાને માટે એક માણસ તેના કિનારા ઉપર **अ** સ્થળે ઉભો રહે છે; અને પોતાની તદ્દન સામે સામેના કિનારા ઉપર એક **ब** ઝાડ જુએ છે પછી તે પોતાના કિનારા ઉપર ૬૦૦ વાર **क** સુધી જાય છે અને જુએ છે તો ∠**अकब** ૩૬° નો માલમ પડે છે; ત્યારે નદી કેટલી પહોળી હશે ?

[અહીં નદીની પહોળાઇ પહેલેથી લઇ શકાય નહિ પરંતુ **अकब** ખુણો નક્કી કર્યા પછી **अब** માપી લેવી જોઇએ તેથી નીચે પ્રમાણે રચના કરો]

રચના. એક **अ** બિંદુ લો. અને **अ** માંથી **अक** દોરો. **अक** = ૬·૦" (સ્કેલ ૧૦૦ વાર = ૧") કાપો. ∠**अकब**, ૩૬° નો કરો અને **अ** માંથી **अक** ⊥ **अब** દોરો. ત્યારે **अब** નદીની પહોળાઇ બતાવે છે.

अब માપી લો. **अब** ૪·૩૬" છે. અને સ્કેલ ૧.૦૦ વાર = ૧" છે. માટે **अब** પહોળાઇ ૪૩૬ વાર છે તેથી નદી ૪૩૬ વાર પહોળી છે. કૃ૦ કૃ૦

નમુનો ૫ મો.

પ્રશ્ન. એક આપેલા પાયા ઉપર જે જે ત્રિકોણો દોર્યા હોય તે બધા ત્રિકોણોની બીજી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી નિયમિત લંબાઇની છે.

પક્ષ. **अब** એક આપેલો પાયો છે.

સાધ્ય. ત્યારે **अब** ઉપરના કોઇપણ ત્રિકોણની બીજી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી નિયમિત લંબાઇની થશે.

ધારો કે **अब** પાયા ઉપર **अबक** જેવો કોઇપણ ત્રિકોણ દોર્યો છે.

રચના. **कअ**, **कब** ને **इ**, **ड** માં દુભાગો. **इड** સાંધો.

સિદ્ધતા. इ, ड, ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ છે.

∴ **इड**, **अब** ∥ છે; અને **इड**, **अब** થી અર્ધી છે.

પણ **अब** આપેલો પાયો નિયમિત લંબાઇનો છે;

∴ **इड** પણ નિયમિત લંબાઇની છે. અને એજ પ્રમાણે ગમે તેટલા △ઓ દોર્યા હોય તો તે દરેક △માં **इड** – મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટી – **अब** થી અર્ધી, એટલે નિયમિત લંબાઇની છે. **પ્ર૦ સિ૦**

સમાપ્ત.

સોલ એજંન્ટ, મી. કરસનદાસ નારણદાસ,
નાણાવટ, સુરત.